arXiv:1309.2824v1 [math.HO] 11 Sep 2013

Pascal, Fermat et la géométrie du hasard

Nicolas Trotignon
Mémoire réalisé à l'IUFM de Créteil

Sous la direction d'Evelyne Barbin

1er juin 1998

Table des matières

1 Remeciements 1
2 Introduction 2
3 Le savoir-faire de Pascal et de Fermat 5
3.1 La méthode par les combinaisons et la méthode 'pas à pas' 5
3.2 Les limites de la méthode par les combinaisons 12
3.3 Comment les fondateurs de la géométrie du hasard n'ont pas découvert la notion de probabilité 17
4 Les fondements de la géométrie du hasard au XVII^{e} siècle 19
4.1 Position du problème 19
4.2 Le *Traité du triangle arithmétique* 20
4.3 Nouvel éclairage sur la méthode 'pas à pas' 29
5 Conclusion 33
Annexes : 34
A Le *Pari* de Pascal 34
B Le traité de Huygens 35
C Précisions techniques sur la lettre du 29 juillet 1654 37
D Bibliographie 41
E Actualité de la géométrie du hasard 42

1 Remeciements

Je tiens à remercier Evelyne Barbin qui a dirigé ce travail et a su me faire profiter de sa grande connaissance de l'histoire des mathématiques. Je remercie également Christelle Petit d'avoir patiemment relu mon texte.

Vincent Gérard et Pierre-Étienne Moreau m'ont aidé à préciser quelques indications bibliographiques.

La mise en forme de ce document a été réalisée sans l'aide d'aucun logiciel commercial.

2 Introduction

Le problème des partis

"Deux camps jouent à la balle ; chaque manche est de dix points et il faut 60 points pour gagner le jeu ; la mise totale est de dix ducats. Il arrive que, pour quelque raison accidentelle, le jeu ne puisse s'achever. On demande ce que touche de la mise totale chacun des deux camps, lorsque l'un a 50 points et l'autre 20 points" [1].

L'énoncé ci-dessus, dû à Pacioli, est la première version de ce que 145 années plus tard Pascal appellera le problème des partis [2]. Il réapparaît tout au long du XVI^{e} siècle sous la plume de différents auteurs italiens, sans qu'aucun ne parvienne à en donner une solution satisfaisante. Ernest Coumet évoque notamment les contributions de Pacioli (1494), de Tartaglia (1578), de Forestani (1603), de Cardan (1539) et de Peverone (1558) [3]. En 1654, le problème est enfin résolu par Pascal, puis, par Fermat, ce qui marque la naissance de la théorie des probabilités [4].

Pascal avait la conviction qu'il inaugurait là une nouvelle ère de l'histoire des mathématiques et de la pensée : dans son *Adresse à l'Académie Parisienne*, en 1654, il donne un aperçu de ses travaux achevés ou en projet, et annonce "un traité tout à fait nouveau, d'une matière absolument inexplorée jusqu'ici", qui peut "s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant : *la géométrie du hasard* [6]". "Stupéfiant" car auparavant le hasard semblait par essence irréductible à toute considération rationnelle — irréductibilité qui incitait au doute quant à la possibilité même de résoudre le problème des partis. Ainsi Tartaglia pouvait-il écrire : "La résolution d'une telle question est davantage d'ordre judiciaire que rationnel, et de quelque manière qu'on veuille la résoudre, on y trouvera sujet à litige" [7]. (Cette situation demeure assez rare en histoire des mathématiques pour mériter une parenthèse, les mathématiciens ayant d'ordinaire une confiance plutôt excessive en la portée de concepts qui montrent leurs limites après coup : nombres

1. Luca Pacioli, *Suma de arithmetica* (1509), d'après un document polycopié de l'IREM de Paris VII.

2. Je signale que dans les textes de Pascal, il est question de "parties" et de "partis". "Partie" doit s'entendre dans le sens courant de "durée d'un jeu, à l'issue de laquelle sont désignés gagnants et perdants". "Parti", nom masculin vieilli, signifie "ce qu'une personne a pour sa part", au moment où la partie est interrompue dans le cas qui nous occupe. Ces définitions sont empruntées au *Petit Robert*.

3. Ernest Coumet, *Le problème des partis avant Pascal* in *Archives internationales d'histoire des sciences*, numéro 18, 1965, fascicule 72–73, pages 245 – 272.

4. Le mot 'probabilité' est ici anachronique. Il a une histoire touffue. Je mentionnerai simplement qu'au XVII^{e} siècle, il désignait "la chance qu'une chose a d'être vraie" et, en théologie, une "doctrine fondée sur les opinions probables" [5], de laquelle, par une ironie de l'histoire, Pascal fut l'adversaire.

Dans son acception mathématique, le mot probabilité n'a commencé à être utilisé qu'au début du XVIII^{e} siècle.

Je constate que l'ordinateur refuse d'envisager la possibilité d'une note en bas de page référencée dans une autre note (l'ordinateur n'est pas borné : *c'est* une borne). La note 5 renvoie au *Dictionnaire historique de la langue française* chez Robert.

6. Le traité s'appellera finalement *Traité du triangle arithmétique*.

7. Citation empruntée à E. Coumet, *op. cit.*

rationnels, constructions à la règle et au compas, résolution par radicaux des équations, géométrie Euclidienne, systèmes formels ...).

On comprend finalement que la résolution du problème des partis, plus qu'un simple progrès technique des mathématiques, est une véritable révolution dans notre conception du hasard. Et si le problème des partis a une histoire avant Pascal[8], il reste que le basculement définitif de l'erreur dans la vérité, opéré en 1654, marque une rupture nette et rapide dans le progrès des idées. En dépit des prédécesseurs de Pascal, l'invention de la géométrie du hasard est un événement bref dont témoigne un corpus de textes bien délimité, qu'il nous reste à examiner brièvement avant de poursuivre.

Les sources utilisées

En 1654, le problème des partis resurgit dans des conditions assez obscures. Le chevalier de Méré le propose à Pascal[9], qui le résout et le soumet à son tour (par l'entremise de M. de Carcavi) à Fermat, qui le résout lui aussi. Les textes qui nous sont parvenus sont tous postérieurs à ces échanges (à l'exception peut-être d'une lettre non datée). Ils consistent en une correspondance entre Pascal, Fermat, Huygens et M. de Carcavi, ainsi qu'en quelques traités donc voici une brève description à laquelle on pourra se référer pour situer tel ou tel extrait donné par la suite[10] (un encart détachable reprend l'essentiel de cette liste) :

- Correspondance :
  - **Une lettre non datée de Fermat à Pascal.**
    Assez obscure, cette lettre concerne le jeu de dés. Nous l'appellerons 'la lettre non datée'.
  - **Une lettre perdue de Fermat à Pascal.**
    On a la certitude que Fermat a envoyé à Pascal la solution du problème des partis avant le 29 juillet 1654, sans doute par l'intermédiaire de M. de Carcavi. Nous nous réfèrerons donc à une certaine 'lettre perdue'.
  - **Pascal à Fermat, 29 juillet 1654.**
    Méthode originale pour trouver le parti entre deux joueurs. Calculs combinatoires assez poussés.
  - **Pascal à Fermat, 24 août 1654.**
    Pascal critique à tort l'utilisation des combinaisons par Fermat.
  - **Fermat à Pascal, 29 août 1654.**
    Politesses. Arithmétique. Remarquons que Fermat n'a pas encore reçu la lettre du 24 août et qu'il énonce un faux théorème de théorie des nombres resté célèbre[11].

8. Voir à ce sujet Ernest Coumet, *op. cit.*

9. "M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions", lettre de Pascal à Fermat du 29 juillet 1654.

10. Pour plus de détails, voir en bibliographie.

11. Je ne résiste pas au plaisir idiot de prendre en défaut un génie mathématique : "Les puissances quarrées de 2, augmentées de l'unité, sont toujours des nombres premiers. [...] C'est une propriété de la vérité de laquelle je vous réponds."

  - **Fermat à Pascal, 25 septembre 1654.**
    Réponse à la lettre du 24 août. Fermat justifie brillamment sa méthode.
  - **Pascal à Fermat, 27 octobre 1654.**
    Pascal reconnaît la justesse de la méthode de Fermat.
  - **Fermat à Carcavi, juin 1656.**
    Fermat donne sans justification les réponses à diverses questions, probablement posées par Huygens.
  - **Huygens à Carcavi, 6 juillet 1656.**
    Huygens constate que Fermat a trouvé les réponses, et en donne des démonstrations. Il sollicite l'avis de Pascal et de Fermat à propos de son traité.
  - **Carcavi à Huygens, 28 septembre 1656.**
    Carcavi commente certaines méthodes de Pascal et Fermat.
- Traités, communications diverses, ouvrages :
  - *Traité du triangle arithmétique*[12], de Pascal.
  - *Divers usages du triangle arithmétique*, de Pascal.
  - *Combinationes*, de Pascal.
  - *Adresse à l'Académie Parisienne*, 1654, de Pascal.
  - *Du calcul dans les jeux de hasard*, 1656 – 1657, de Huygens.

Dans la suite, nous ne parlerons plus des *Divers usages du triangle arithmétique*, que nous considèrerons comme une partie du *Traité du triangle arithmétique*.

Ce qui sera dit

Dans la première partie de ce mémoire, je chercherai à donner une idée aussi précise que possible des différentes techniques en vigueur en 1654 pour résoudre le problème des partis. Nous verrons qu'une lecture de la correspondance entre Pascal et Fermat fait apparaître dès l'origine au moins deux méthodes concurrentes : la méthode 'pas à pas' et la méthode par les combinaisons. Il sera surtout question de la méthode par les combinaisons, car elle seule pose de véritables problèmes techniques.

Nous nous intéresserons dans la seconde partie aux fondements de la géométrie du hasard au XVII^{e} siècle. Après m'être expliqué sur ce que j'entends par fondement, après une étude du *Traité du triangle arithmétique*, je tenterai de montrer que les intentions, les limites, l'origine peut-être de la méthode 'pas à pas' s'inscrivent dans la longue tradition de ces travaux qui, à l'instar des *éléments d'Euclide*, prétendent fonder les mathématiques sur des bases claires et solides.

12. La datation du *Traité* pose problème. Comme on l'a vu, Pascal le mentionne déjà dans *L'Adresse à l'Académie Parisienne*. Fermat en évoque la "onzième conséquence" dans sa lettre du 29 août 1654. Mais rien n'indique que la partie qui nous importe le plus, *Usage du triangle arithmétique pour determiner les partis qu'on doit faire entre plusieurs joueurs qui jouent en plusieurs parties*, fût déjà rédigée à cette époque. Surtout, on ignore la forme exacte du *Traité* en 1654 puisque selon les *Œuvres complètes* éditées au Seuil, il n'a été publié qu'en 1665 chez Guillaume Desprez. La même remarque vaut pour *Divers usages du triangle arithmétique* et *Combinationes*.

3 Le savoir-faire de Pascal et de Fermat

3.1 La méthode par les combinaisons et la méthode 'pas à pas'

Quelques lignes étonnantes dans une lettre fameuse

La lettre de Pascal à Fermat du 29 juillet 1654 est passée à la postérité. En dehors peut-être de la célèbre marge où Fermat prétendait avoir trouvé la preuve de son grand théorème [13], peu de fragments écrits de la main d'un mathématicien connurent une telle célébrité. D'ou vient pareil renom ? Tout d'abord cette lettre marque la naissance d'une branche radicalement nouvelle des mathématiques. Et surtout, ses premiers paragraphes sont peut-être un exemple unique d'un texte mathématique fondateur immédiatement accessible à quiconque possède des notions élémentaires d'arithmétique. Le style en est si clair, les arguments si limpides que Pascal emporte la conviction avec une apparente économie de moyens techniques et conceptuels. Plutôt que de résumer ce *morceau* (vaine entreprise), j'ai préféré le reproduire intégralement :

> Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :
>
> Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, il sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.
>
> Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : "Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ; le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres." Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.
>
> Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.
>
> Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas, il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette

13. Je crois qu'il est inutile de chercher à se procurer une reproduction de cette marge. On lit en effet dans le Bloc Notes de Didier Nordon, in *Pour la Science*, Mars 1999, page 5 : "Le livre sur lequel Fermat a griffonné serait perdu — et sa marge avec."

partie, il doit dire ainsi : “Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi.” Ainsi il y aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'*une* partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : “Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12, et moi 12, qui avec 32, font 44.”

Voilà le problème des partis brillamment résolu en quelques lignes. Mais le danger de ce fragment, c'est qu'ébloui par son éclat, on risque d'oublier qu'il ne s'agit justement que d'un fragment. Les techniques de Pascal et de Fermat pour calculer les partis sont, dès 1654, assez variées et cette méthode que nous appelons conventionnellement ‘pas à pas’ n'est qu'un échantillon dont il nous appartiendra, au-delà de son prestige, de montrer la singularité, tant dans les travaux de Pascal lui-même, que dans l'histoire générale de la théorie des probabilités.

Car la méthode ‘pas à pas’, sur l'origine de laquelle nous reviendrons dans la seconde partie de ce travail, n'est pas la première imaginée par Pascal pour calculer les partis. Pascal félicite en effet Fermat d'y être parvenu par une autre méthode [14] : “la méthode qui procède par les combinaisons” [15]. Malheureusement, la solution de Fermat est aujourd'hui perdue. Mais la suite de la lettre de Pascal et les lettres suivantes nous donnent une idée de cette méthode par les combinaisons.

Calculs combinatoires

Dans sa lettre à Fermat du 24 août 1654, Pascal émet des doutes sur les méthodes de son correspondant. Pour lancer la discussion sur de bonnes bases, il commence par résumer le contenu de la lettre perdue, ce qui nous en donne un aperçu. Voici donc la méthode imaginée indépendamment par Pascal et Fermat pour résoudre le problème des partis. Je préfère encore une fois en donner le texte original dans son intégralité :

> Voici comment vous procédez quand il y a *deux* joueurs :
>
> Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque *deux* parties au premier et *trois* au second, pour

14. “Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue”, lettre du 29 juillet 1654.

15. L'expression est tirée de la lettre du 24 août 1654.

trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en *quatre* parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours-là, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant ; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties) ; et maintenant, il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : il en peuvent avoir *seize* qui est le second degré de *quatre*, c'est-à-dire, le quarré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second ; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes :

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

et, parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux a le font gagner : donc il en a 11 pour lui ; et parce qu'il y manque trois partie au second, toutes les faces où il y a trois b le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

Un lecteur attentif ne manquera pas de remarquer que le jeu ne se terminera pas nécessairement en quatre parties. Il se peut très bien que le joueur 1 gagne ses deux premiers coups et qu'il soit inutile de poursuivre. Considérer cependant pour la commodité du calcul un jeu se terminant uniformément en quatre coups est un procédé légitime. Cet artifice de démonstration, que Pascal appelle le recours à une "condition feinte" [16] fait l'objet d'une intéressante polémique entre Pascal, Fermat et Roberval sur laquelle nous reviendrons par la suite et qui devrait convaincre les sceptiques. Concentrons-nous plutôt, pour le moment, sur les aspects calculatoires de la méthode. Dans la lettre du 24 août, ils sont tout à fait élémentaires, alors que dans sa lettre précédente, celle du 29 juillet 1654, Pascal fournit des résultats beaucoup plus techniques. Il montre comment, dans une partie en n coups gagnant, on peut déterminer le parti d'un joueur

16. Lettre du 24 août 1654.

menant par une victoire à zéro, ou comme il dit : “étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première”. Le joueur menant par une partie doit, explique Pascal, considérer comme acquise sa propre mise, mais aussi prendre une certaine proportion p' de la mise de son adversaire, qui n'est autre que le quotient du produit des $n-1$ premiers nombres impairs par celui des $n-1$ premiers nombres pairs. Nous dirions aujourd'hui :

$$p' = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(2i-1)}{\prod_{i=1}^{n-1}(2i)}$$

Cette formule surprend pour qui a un peu l'habitude des exercices modernes de calcul des probabilités. Comme pouvait l'écrire le pohête Louis Bouilhet (il ne parlait pas de mathématiques), cette formule,

> ... Elle a cela pour elle,
> Que les sots d'aucun temps n'en ont su faire cas,
> [...] qu'elle est limpide et belle [17],

et une pareille élégance est assez inhabituelle dans une matière où l'on s'attend plutôt à des entassements d'éléments dénués de signification apparente.

Pascal parvient à cette formule au prix de calculs assez longs, et difficiles à suivre, mais dont l'argument central semble être la valeur p de la probabilité [18] qu'a un joueur de gagner lorsqu'il mène par un à zéro :

$$p = \frac{\binom{n-1}{2(n-1)} + \binom{n}{2(n-1)} + \binom{n+1}{2(n-1)} + \cdots + \binom{2(n-1)}{2(n-1)}}{2^{2(n-1)}}$$

Cette valeur s'obtient par généralisation de la méthode de la lettre du 24 août 1654 : on remarque que le jeu se termine au plus en $2(n-1)$ manches. Il y a donc au dénominateur $2^{2(n-1)}$ parties différentes possibles, parmi lesquelles il reste à dénombrer celles qui sont gagnées par le joueur 1 (c'est-à-dire celles où il gagne $(n-1)$ parties, celles où il en gagne n ... et enfin celle où il en gagne $2(n-1)$) ce qui donne bien la somme de coefficients du binôme du numérateur.

Pascal ne fournit pas d'explications complètes sur l'étonnante valeur de p' ni *a fortiori* sur son lien avec celle de p. Par ailleurs le rapport p n'apparaît même pas explicitement dans sa lettre. Le lecteur féru de mathématiques voulant se convaincre que Pascal a bien calculé p un jour ou l'autre pourra se reporter à l'annexe C pour plus de détails.

Comme on le voit, Pascal réalise donc des calculs d'une belle richesse technique. Loin d'être une simple possibilité abandonnée par la suite, la méthode des

17. Citation empruntée à *Pauvre Bouilhet* de Henri Raczymow, Gallimard, 1998, page 65, dans le but principal d'essayer l'environnement `verse` de LaTeX.

18. Attention, Pascal n'utilise jamais ce mot, ni aucun synonyme. Toutefois la lettre du 24 août 1654 nous montre bien qu'il calculait des “rapports” de fait égaux à des probabilités. Nous reviendrons au §1.3 sur le statut de la notion de probabilité au XVII^{e} siècle.

combinaisons est pour lui un objet de recherches attentives et finalement fructueuses. Mais il a certainement surestimé l'importance de sa formule : elle n'est, pour autant que je sache, liée à aucun résultat important, elle ne se généralise pas, et sa remarquable symétrie paraît au fond contingente. Pourtant, Carcavi la signale à Huygens dans sa lettre du 28 septembre 1656 : "Et le dit S^{r} Pascal n'a trouvé la règle que lorsqu'un des joueurs a une partie à point ou deux parties à point (lorsque l'on joue en plusieurs parties), mais il n'a pas la règle générale". Cela suggère bien que Pascal s'est fourvoyé, momentanément au moins, dans la recherche de "la règle", d'une belle formule.

Cela dit, comment est-il parvenu à concevoir ce véritable embryon de calcul des probabilités fondé d'emblée sur la combinatoire ? Avant d'avancer quelque hypothèse, il est nécessaire de s'attarder un peu sur le contexte local des relations entre Pascal et Fermat, mais aussi tout d'abord sur l'histoire du problème des partis au XVI^{e} siècle.

Contexte historique

Dans une certaine mesure, la méthode des combinaisons peut s'inscrire dans la continuité des tentatives archaïques de résolution du problème des partis. De Pacioli à Cardan, l'analyse du problème des partis se raffine.

Pacioli se contente d'un calcul rudimentaire. D'une part il compte le nombre maximal n de coups nécessaires à la victoire d'un des joueurs. D'autre part, il compte le nombre de points de chacun, et partage l'enjeu au prorata de ces points, sans faire, curieusement, aucun usage de n. Si la méthode de Pacioli paraît aujourd'hui farfelue, elle n'en est pas moins porteuse d'au moins trois idées importantes :

- La première est tout simplement de se poser le problème des partis. C'est déjà le signe d'une certaine maturité : après tout, Pacioli aurait pu dire que celui qui a 50 points a autant de chances de l'emporter que celui qui en a 20, le hasard se devant de compenser ses méchants coups par de bonnes fortunes. En fait, si Pacioli s'était fourvoyé dans de telles croyances, il n'aurait sans doute rien écrit sur le problème des partis.
- Ensuite vient l'idée que pour résoudre le problème des partis, il faut faire tôt ou tard un partage au prorata d'un certain nombre de points. Après tout, on ne fait rien d'autre que cela en calculant une probabilité, tout l'art étant, comme le fait remarquer Fermat, de compter des "hasards égaux" [19].
- Enfin, et c'est à la fois la plus étonnante et la moins importante, l'idée de faire intervenir le nombre maximum de parties indispensable à l'achèvement du jeu, et de se fonder sur ce nombre. La plus étonnante car comme on va le voir c'est un point crucial de la méthode par les combinaisons. La moins importante, parce que Pacioli n'a sûrement pas compris l'intérêt de

19. Lettre du 29 août 1654. Pascal parle aussi, en de nombreux passages de ses textes, de chances égales, mais dans un contexte très différent. Il ne s'agit pas pour lui de dénombrer des chances égales pour calculer ce qu'on appellerait maintenant une probabilité, mais de justifier le partage en deux de l'enjeu d'une partie.

ce calcul : on a vu qu'il n'en fait aucun usage. C'est tout de même un point à méditer, et sur lequel je n'ai pas grand-chose à dire : l'idée de compter le nombre maximal de parties restant à jouer est à la fois l'idée la plus intéressante et la plus facilement prise en compte par les prédécesseurs de Pascal et de Fermat. Peut-être parce que ce nombre est facile à calculer et ne prête pas à polémique. Dans une matière aussi ardue que le problème des partis, c'est une perche trop belle pour être négligée. Pacioli s'en saisit et n'en fait rien.

Avec Cardan, l'étape décisive est franchie. Il est le premier qui cherche à résoudre le problème dans des cas concrets très simples (2 victoires à 1 ...), et surtout il remarque que les victoires engrangées par les joueurs ne comptent pas, que seul importe le nombre de parties encore à jouer [20].

Répétons le, le problème des partis a une histoire avant Pascal. Et si, comme le dit E. Coumet, Cardan est bien un prédécesseur du Pascal de la méthode 'pas à pas', on peut en outre affirmer que les géomètres italiens de la Renaissance sont des précurseurs du Pascal de la méthode des combinaisons. La question de savoir si Pascal ou Fermat ont eu connaissance de tous ces travaux est pour autant que je sache ouverte.

Plus proches de Pascal et de Fermat, les travaux sur les combinaisons, initiés par Mersenne [21], et dont je n'ai malheureusement pas eu le temps de prendre connaissance, ont déjà en 1654 presque 20 ans. Nous voilà revenus au XVII^{e} siècle, une époque où la vie savante européenne commençait à s'organiser.

Le contexte des relations entre Pascal et Fermat

Les relations entre Pascal et Fermat prennent place dans le cadre des échanges entre savants. à l'époque, il n'y avait pas de grandes institutions scientifiques (l'Académie royale des sciences ne sera fondée par Colbert qu'en 1666) et des hommes tels que le père Mersenne ou M. de Carcavi aimaient à mettre en rapport les mathématiciens et les physiciens de toute l'Europe. L'habitude de soumettre des questions à la sagacité de ses confrères était alors un mode naturel de communication. La correspondance entre Pascal et Fermat sur le problème des partis débute précisément par l'entremise de Carcavi : c'est lui qui pose à Fermat le problème des partis. Mais de là à croire que l'histoire de ce problème au XVII^{e} siècle commence par la lettre perdue et la lettre du 29 juillet 1654, il y a tout de même un pas.

Tout d'abord, la lettre perdue n'est pas le premier contact entre Pascal et Fermat. Il existe une autre lettre [22], qui n'a rien à voir avec les partis, beaucoup

20. E. Coumet fait en substance les mêmes remarques dans son article. Mais son optique, plus originale, est de montrer par une fine analyse des écrits de Cardan que celui-ci est aussi le précurseur de la méthode 'pas à pas'. Je ne reviendrai pas sur ce point, et renvoie donc le lecteur intéressé à l'article de E. Coumet. *op. cit.*

21. Dans *l'Harmonie universelle contenant la théorie et la pratique de la musique*, Cramoisy, 1636, Mersenne se livre à des dénombrements. Par exemple : combien peut-on écrire de morceaux différents avec huit notes ?

22. Hélas sa date m'a échappé. Je l'ai vu dans les *Œuvres complètes* de Fermat, et je n'ai vraiment pas le temps d'y retourner. Si je souviens bien, Blaise Pascal devait alors avoir à peu

plus ancienne, peut-être destinée au père de Pascal. Cette lettre indique en tout cas que Pascal et Fermat avaient au moins eu vent l'un de l'autre avant 1654.

Pour les questions qui nous occupent, la lettre non datée de Fermat à Pascal pose un problème plus délicat et mérite d'être analysée : il y est question d'un problème de jeu de dés. Un joueur parie qu'en lançant le dé 8 fois, il fera au moins une fois 6. Après l'engagement de l'enjeu, le joueur renonce finalement à jouer son premier coup, et demande à en être dédommagé. Après quoi il renonce également à jouer son deuxième coup, son troisième, et ainsi de suite. à chaque étape, le joueur reprend donc pour lui un sixième de l'enjeu encore présent, puisqu'il renonce à avoir une chance sur six de le gagner. Selon Fermat, Pascal aurait ainsi calculé la valeur de la $k^{\text{ième}}$ partie, qui n'est pas constante en fonction de k puisqu'à chaque abandon, l'enjeu diminue de 1/6. Et Pascal en conclurait qu'un joueur qui, ayant perdu trois parties, renonce à sa quatrième, doit récupérer cette valeur de la quatrième partie de huit, soit 125/1296 du total de la mise de départ. Ce en quoi Fermat le contredit avec juste raison : renoncer à la quatrième partie après avoir perdu les trois premières, c'est exactement renoncer à un sixième de l'enjeu de départ, car, dit Fermat, "la somme entière restant dans le jeu, il ne suit pas seulement du principe, mais il est même du sens naturel que chaque coup doit donner un égal avantage".

Avant de revenir à nos problèmes de chronologie, notons au passage que Pascal semble ici être la victime de l'emploi abusif d'une notion : la valeur de la $\text{k}^{\text{ième}}$ partie de n, notion présentant l'inconvénient, certes inévitable en calculs des probabilités, de difficilement se transporter d'un problème à un autre. Je vois là un travers de philosophe, qui, en quête d'une certaine universalité, recherche à toute force et en toute situation à user d'un principe général. Sans dire que Pascal à "l'esprit faux" [23], puisque "les esprits faux ne sont jamais ni fins ni géomètres", je ne peux m'empêcher ici de lui retourner les gentillesses qu'il adresse aux "esprits fins qui ne sont pas géomètres", qui "ne peuvent du tout se tourner vers les principes de géométrie" [24]. Il me paraît difficile de savoir si la lettre non datée est antérieure au reste de la correspondance. Le 29 juillet 1654 il est fait état d'un probléme "des dés", ce qui peut la replacer dans le contexte de la correspondance, sans que l'on puisse alors lui attribuer une date plausible. Fermat y évoque déjà des problèmes subtils, ce qui milite pour une lettre tardive, mais à l'aide de techniques rudimentaires, ce qui est au contraire le signe d'une certaine précocité ... Heureusement, la suite de la correspondance nous offre une matière suffisante sans qu'il soit indispensable de recourir à d'hypothétiques datations.

La lettre du 29 juillet 1654 a visiblement été écrite rapidement : Pascal y mentionne son "impatience", pour avouer dans sa lettre suivante qu'il n'a pu "ouvrir sa pensée entière touchant les partis". Les lacunes dans les démonstrations trouvent peut-être là leur origine. L'impression générale se dégageant de la lettre est celle d'un premier contact : les félicitations de Pascal ("J'admire ...") laissent transparaître un certain étonnement qui nous suggère qu'il n'avait pas l'habi-

près 17 ans quand cette lettre a été écrite.

23. Pensée n° 1.

24. Pensée n° 1.

tude de la confrontation avec le génie de Fermat. Encore une fois, rien ne prouve qu'on ait affaire à la première lettre concernant la géométrie du hasard.

Sans aller jusqu'à préjuger de l'existence d'une correspondance perdue entre Fermat et Pascal, qui expliquerait un peu trop facilement l'irruption si soudaine et simultanée de la vérité dans la question des jeux de hasard, il est certain qu'en 1654, Pascal n'est pas un franc-tireur s'intéressant seul à la combinatoire et à la géométrie du hasard. Il y avait de nombreuses discussions à ce sujet entre savants, mais aussi entre esprits curieux qui n'ont pas forcément laissé leur nom dans l'Histoire : on a vu que le père Mersenne s'occupait de combinatoire (sans lien avec le hasard), Roberval discutait avec Pascal, Pascal dit à Fermat qu'il communique sa méthode "à nos Messieurs" [25], un certain M. de Gagnière suggérait à Pascal le moyen de calculer directement les combinaisons [26], le chevalier de Méré a proposé à Pascal le problème des partis [27] ... Si ce bouillonnement a laissé aussi peu de traces, c'est peut-être qu'avant la percée pascalienne, personne ne pensait que l'étude du hasard mènerait un jour à quelque chose de sérieux. C'est sans doute l'un des principaux mérites de Pascal que d'y avoir cru le premier. La question, que je n'ai pas résolue, est de savoir si Fermat, du fond de sa province toulousaine, était ou non mêlé à ces savantes mondanités. Sans doute pas : Carcavi, sceptique ou enthousiaste, a simplement voulu soumettre au grand géomètre les idées bizarres du "S^{r} Pascal". L'on ne doit pas trop s'étonner que Fermat ait su résoudre seul le problème des partis : Fermat c'est Fermat après tout. Tout au plus conviendrons-nous que grâce peut-être à Mersenne, ce point pouvant sans doute être élucidé, Fermat savait déjà pas mal de choses sur les combinaisons.

Mais nous n'avons pour l'instant que des informations contextuelles sur la place de la méthode par les combinaisons, tant chez Pascal que chez Fermat. Elle est pourtant l'objet de jugements surprenants et de controverses au sein même de leur correspondance.

3.2 Les limites de la méthode par les combinaisons

Aujourd'hui, la méthode des combinaisons est le moyen naturel, aussi bien pour l'enseignant, l'ingénieur que le joueur de poker [28], de résoudre des problèmes élémentaires de probabilités discrètes. Aussi peut-il paraître absurde de s'interroger sur les limites de la méthode des combinaisons. La suite montrera que non.

25. Lettre du 24 août 1654.
26. Mentionné à la fin du traité *Combinationes*.
27. Lettre du 29 juillet 1654. Nous reviendrons sur ce point dans la conclusion.
28. En ce qui concerne les enseignants et les ingénieurs, n'importe quel ouvrage où il est question de probabilités discrètes montre l'importance des combinaisons. Pour les joueurs de poker, on consultera avec profit *L'illusion du hasard, traité de poker en partie libre*, par Alexis Beuve, aux éditions Rouge Vif, août 1997.

L'aversion de Pascal pour la méthode par les combinaisons

Chez Pascal, la méthode par les combinaisons est toujours reléguée au second plan avec des conséquences parfois énormes. Ainsi, dans le *Traité du triangle arithmétique*, Pascal distingue-t-il trois méthodes pour "déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs" : la méthode 'pas à pas', la méthode "par le moyen du triangle arithmétique", et une fort mystérieuse méthode "par les combinaisons". Mystérieuse car, étrange négligence, Pascal annonce cette méthode [29] sans donner la moindre indication sur son contenu par la suite.

On peut tenter d'expliquer cette lacune. La méthode "par les combinaisons" est rigoureusement identique à celle "par le moyen du triangle arithmétique", que Pascal donne dans son *Traité*. Les coefficients inscrits dans ce triangle sont en effet ce qu'on appelle aujourd'hui les coefficients du binôme, des dénombrement de combinaisons. Pascal aurait donc renoncé à écrire cette platitude que la méthode par les combinaisons n'est autre que celle par le triangle, au mot près. Et par une négligence ou une interpolation, l'annonce de la partie abandonnée est restée là comme un fossile. Cette hypothèse ne me convainc que partiellement. J'essaierai de la compléter dans la deuxième partie de ce mémoire. En attendant, Pascal lui-même donne quelques indications sur son rejet de la méthode des combinaisons.

"La peine des combinaisons"

Selon Pascal, "la peine des combinaisons est excessive" [30]. S'il relègue les combinaisons au second plan, ce serait simplement par paresse, par fatigue si l'on tient à laisser la religion en dehors de tout ça. Voilà une réponse qui nous confronte à un nouveau mystère : nous avons vu Pascal manier les combinaisons avec virtuosité. Je crois qu'il faut voir là un effet de ce qu'Alexandre Koyré appelle son "refus des formules" [31].

Le lecteur d'aujourd'hui ne peut qu'être frappé par la façon dont Pascal présente ses calculs. Par exemple, pour expliquer à Fermat ce qu'est le produit des huit premiers nombres pairs, après lui avoir rappelé à toute fin utile que ces nombres étaient "2, 4, 6, 8, 12, 14, 16", il prend soin de décrire le calcul :

> Multipliez les nombres pairs en cette sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, le produit par le quatrième, le produit par le cinquième etc.

Je rappelle que Pascal s'adresse au meilleur mathématicien de son temps, et que la lettre du 29 juillet 1654 d'où est tiré cet intéressant passage a sans doute été écrite dans une relative impatience, sans souci de clarté excessive en tout cas. Alors pourquoi Pascal se lance-t-il dans des explications aussi triviales ?

à mon avis, et cela transparaît ailleurs que dans cet exemple grossier, Pascal n'accorde que peu de signification à une expression telle que 'le produit des

29. *Divers usages du Triangle arithmétique*, troisième partie, après le "septième cas".
30. Lettre du 29 juillet 1654, paragraphe 3.
31. *Pascal savant* in *études d'histoire de la pensée scientifique* chez Gallimard, collection Tel, 1973.

premiers entiers pairs'. Pour lui une formule n'est que la retranscription abrégée d'un algorithme. N'oublions pas que Pascal est aussi l'inventeur de la machine à calculer. Et "le nombre de façons dont 2 se combine dans 4", ce que nous notons $\binom{2}{4}$, n'est pas le résumé concis d'un ensemble de propriétés algébriques que nous aimons tant, mais plutôt le raccourci trompeur d'un algorithme complexe. Notons bien que dès le XVII$^{\text{e}}$ siècle, avec Descartes (mort en 1650) et l'utilisation d'équations de courbes en géométrie, le statut des calculs était en train de changer. Plus encore, en 1656, le traité de Huygens, *Du calcul dans les jeux de hasard*, brièvement étudié à l'annexe B de ce mémoire, montre qu'au XVII$^{\text{e}}$ siècle, il n'y avait pas d'obstacle majeur à une présentation algébrique et relativement moderne de la géométrie du hasard. Pascal peut donc paraître un peu en retard sur son temps quant à sa méfiance envers l'algèbre.

Ainsi, on comprend aisément pourquoi les combinaisons sont une peine pour Pascal : si chaque fois qu'il dénombre une combinaison, il considère l'algorithme plutôt que la formule, si donc il garde en tête l'ensemble des calculs effectifs que cela sous-tend, comme la lettre du 29 juillet semble l'indiquer, le calcul le plus élémentaire devient alors étrangement ardu. Pire, en lui même il est dénué de sens, tare irrémédiable pour un philosophe. Ce dernier point est à mon avis essentiel car Pascal n'est quand même pas systématiquement allergique aux formules. Il semble bien aimer l'expression 'la valeur de la $k^{\text{ième}}$ partie de n', que l'on rencontre partout et dont il donne des tables dans la lettre du 29 juillet 1654. Si les usages l'avaient imposé, il aurait sans doute inventé une notation pour désigner ce nombre, car on a l'impression — le calcul de p' en témoigne — qu'il en cherche obstinément les propriétés algébriques. Sans doute parce que ce nombre a un *sens* lié directement au problème des partis. Et si les combinaisons ont elles aussi un sens, ce n'est pas dans leur calcul qu'il faut le rechercher mais dans ce qu'elles dénombrent, réalité dont le lien avec le problème des partis est problèmatique puisqu'il fait l'objet d'une controverse entre trois des plus grands esprits de l'époque.

Une controverse entre grands esprits

Nous avons vu plus haut que Pascal avait des doutes quant à la justesse des raisonnements de Fermat. Il n'est pas le seul puisque Roberval conteste carrément la méthode des combinaisons. Il craint que l'usage de "conditions feintes" ne conduise à un "paralogisme" [32].

Plus précisément, ainsi que le rapporte Pascal dans sa lettre du 24 août 1654, il considère "que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en *quatre* parties, vu que quand il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue *quatre*, pouvant arriver qu'on n'en jouera que *deux* ou *trois*, ou à la vérité peut-être *quatre*".

Pascal rétorque que "si deux joueurs se trouvant en cet état de l'hypothèse qu'il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue quatre parties complètes, c'est-à-dire qu'on jette les

32. Propos rapportés par Pascal dans la lettre du 24 août 1654.

quatre dés à deux faces tous à la fois, [... alors] le parti doit être [...] suivant la multitude des assiettes favorable à chacun". Roberval admet que "cela en effet est démonstratif", mais ne voit pas en quoi cela justifie le recours à la feinte.

Pascal explique donc : "si le premier gagne les deux premières parties de quatre, et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné ?". Finalement, "puisque ces deux conditions [la naturelle et la feinte] sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre". On retiendra que Pascal fait ici preuve d'une belle audace : il admet implicitement que si deux jeux sont équivalents pour le sens commun, les calculs qu'on peut faire pour l'un ou pour l'autre donneront les mêmes résultats. Un jugement plutôt inné et humain sur l'équivalence de deux situations conduit donc à une égalité numérique, fantastique découverte à mettre au crédit de Pascal. Nous verrons toutefois qu'il appartiendra à Fermat d'en analyser la véritable nature mathématique.

Pour le parti à faire entre deux joueurs, Pascal reconnaît donc la validité de la méthode par les combinaisons. Avec trois joueurs, il n'en va plus de même. Dans le cas où "il manque *une* partie au premier", "*deux* au second" et "*deux* au troisième", il pense qu'on ne peut user de la condition feinte. Car explique-t-il, dans cette condition, "deux [joueurs] peuvent atteindre le nombre de leur parties". En effet, le jeu se décidera en trois parties au plus. Si l'on suppose qu'elles sont effectivement jouées, il se peut que le premier joueur en gagne une, et le deuxième joueur deux, ce qui conduit selon Pascal à désigner deux gagnants. Dans sa lettre du 25 septembre 1654, Fermat rétorque : "il semble que vous ne vous souveniez plus que tout ce qui se fait après que l'un des joueurs a gagné, ne sert plus de rien". Quand le premier joueur gagne une partie, "qu'importe que le troisième en gagne deux ensuite, puisque, quand il en gagneroit trente, tout cela seroit superflu ?"

Pour fixer les idées, le tableau suivant, présent dans la lettre du 24 août 1654, permet de calculer le parti. Le dé a trois faces a, b, et c respectivement favorables aux joueurs 1, 2 et 3. Lancé trois fois, il peut donner 27 assiettes. Chaque colonne indique une assiette possible, puis le vainqueur correspondant. Dans la colonne $\boxed{\begin{matrix}a\\b\\b\end{matrix}}$, Pascal inscrivait à tort, en plus du joueur 1, le joueur 2. Fermat, lui, calcule le juste parti en dénombrant les résultats inscrits dans la dernière ligne : 17/27 des enjeux pour le premier joueur, 5/27 pour les deux autres.

a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	c	c	c
a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	2	3	1	1	1	1	2	3	3	3	3

Pascal commet donc une légère erreur dans la justification de l'usage de la condition feinte. Pour lui, cette condition est légitime si elle ne conduit qu'à

des scores finaux où seul l'un des joueurs détient le nombre requis de victoires. Fermat fait une analyse plus fine, dont il s'explique dans la suite de la lettre du 25 septembre 1654.

Car après tout, l'astuce de la condition feinte est-elle réellement nécessaire au calcul des partis ? Pas le moins du monde. Fermat imagine une autre solution [33]. Il commence par préciser que "le premier [joueur] peut gagner, ou en une seule partie, ou en deux, ou en trois.". Après quoi il calcule les probabilités de victoire dans chacun de ces trois cas. Regardons par exemple comment il calcule la probabilité de victoire en deux parties du premier joueur :

> Si on en joue deux, il peut gagner de deux façons, ou lorsque le second joueur gagne la première et lui la seconde, ou lorsque le troisième gagne la première et lui la seconde. Or, deux dés produisent 9 hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{2}{9}$ des hasards, lorsqu'on joue deux parties.

Fermat calcule donc la probabilité finale en additionnant les trois probabilités trouvées :

> La somme des hasards qui font gagner ce premier joueur est par conséquent $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{2}{27}$, ce qui fait en tout $\frac{17}{27}$.

Après cet anodin calcul, qui n'est rien moins que le premier véritable raisonnement probabiliste de l'histoire des mathématiques, Fermat clôt la controverse, montrant que depuis le début, il est le seul à bien comprendre les calculs à l'œuvre : il explique que la condition feinte, qu'il préfère appeler plus prosaïquement "l'extension à un certain nombre de parties", "n'est autre que la réduction de diverses fractions à une même dénomination".

Cette controverse fait donc apparaître une hiérarchie : Fermat, Pascal, puis, bon dernier de la classe, Roberval. On retiendra simplement la pénétration des vues de Fermat. De tous, il est celui qui est le plus loin de Paris et des débats qui agitent le monde savant. Il est pourtant le seul à voir vraiment clair dans les calculs combinatoires. Mais Pascal qui, de son propre aveu, "n'a d'autre avantage sur [Fermat] que celui d'y avoir beaucoup plus médité" [34], était peut-être handicapé par sa prétendue avance. Qui sait la teneur de ses discussions avec Méré ou Roberval ? Le problème des partis n'a peut-être pas été posé d'emblée dans toute sa netteté, des ébauches de solutions ont pu être proposées avant que l'énoncé ne prenne sa forme définitive. Ces conversations ont pu laisser de mauvais alluvions dans l'esprit de Pascal. Ne dit-il pas que parfois "on se gâte l'esprit et le sentiment par les conversations" [35] ?

33. Je signale que cette solution est la première que j'ai envisagée quand je cherchais à résoudre pour moi-même le problème des partis afin de m'assurer de la véracité de certains calculs de Pascal. Cette méthode me semble d'ailleurs être la première à laquelle pense naturellement quelqu'un qui a étudié les probabilités dans un cursus scolaire actuel. Elle est particulièrement inefficace pour traiter le cas général d'une partie en n coups gagnant.

34. Lettre du 24 août 1654.

35. Pensée n° 6.

3.3 Comment les fondateurs de la géométrie du hasard n'ont pas découvert la notion de probabilité

Dès 1654, les grands mathématiciens français se préoccupaient donc de problèmes de probabilités avec un vocabulaire et des techniques très proches de ce qui se pratique aujourd'hui encore. Mais paradoxalement, le grand absent dans leur débat est justement la notion de probabilité d'un événement. Elle n'apparaît que dans la méthode sans condition feinte de Fermat ("$\ldots\frac{2}{9}$ des hasards").

De fait, Pascal et Fermat calculent des probabilités, mais sans voir, sans dire en tout cas, que le fameux rapport des cas favorables et des cas totaux est, en un sens assez précis [36], une mesure des chances de gagner des joueurs. Et si Pascal évoque "la fraction qui exprime la valeur de la première partie de huit" [37], c'est pour ajouter immédiatement après : "c'est-à-dire que si on joue chacun le nombre de pistoles exprimé par [le dénominateur], il en appartiendra sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par [le numérateur]".

Il semble donc que la probabilité n'est à l'époque qu'un coefficient nécessaire au partage des enjeux. On conviendra que la méthode 'pas à pas' est directement fondée sur la notion d'espérance. Mais la méthode des combinaisons, d'où l'on s'attendrait à voir émerger la notion de probabilité, semble elle aussi paradoxalement imprégnée de l'idée d'espérance. Ainsi, s'il fallait donner un nom moderne à la géométrie du hasard selon Pascal, ce serait bien mieux 'théorie de l'espérance' que 'théorie des probabilités'.

En guise d'explication, j'indiquerai simplement que la notion de probabilité n'a *a priori* que peu d'intérêt une fois sortie de son contexte. Sans support théorique, associer le nombre 1/2 au jeu de pile ou face n'est qu'une paraphrase abstraite et numérique de l'idée naturelle de chances égales. Là n'est pas la richesse de la probabilité qui provient plutôt de son lien avec le concept d'événement : la probabilité de la disjonction ou de la conjonction de deux événements se calcule fort bien moyennant les définitons *ad hoc*. Si la notion de probabilité a fini par s'imposer au fondement de la théorie, c'est parce qu'elle est conservée par les opérations d'une algèbre des événements. Fermat s'engage dans cette voie, comme on l'a vu, en calculant sans feinte le parti dans le cas de trois joueurs, mais sans donner suite. Pourquoi ?

En premier lieu parce que dans le cas d'un jeu à n joueurs, sa méthode probabiliste ne permet pas facilement d'exprimer le parti par une formule ramassée. Pour autant que mes tentatives n'aient pas été trop maladroites, la mise au même dénominateur qui se fait sans souffrance par le moyen de la condition feinte est inextricable quand on se trouve nez à nez avec des monstruosités du type :

$$\frac{1}{2^2}\binom{2}{2} + \frac{1}{2^3}\binom{2}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+2}}\binom{2}{k+1}$$

Cette formule est directement issue de l'application de la méthode de Fermat.

36. Ce sens se dégage des définitions et des théorèmes de la théorie moderne des probabilités, de la loi faible des grands nombres notamment.

37. Lettre du 29 juillet 1654.

Au premier joueur, il manque 2 parties, à l'autre k. Le jeu peut donc se terminer en 2, 3, ..., ou $k+2$ coups. Dans chacun des cas, on dénombre les cas favorables au premier joueur, soit par exemple dans le cas où la partie se terminerait en $k+1$ coups, $\binom{2}{k+1}$. On divise ce nombre par le nombre total de cas envisageables dans une partie en $k+2$ coups : 2^{k+2}.

Mais la complexité des calculs n'est peut-être pas ce qui a détourné Fermat des méthodes probabilistes. En fait, la géométrie du hasard dans son ensemble ne l'intéresse sans doute pas. En 1654, sa correspondance montre qu'il s'occupe de théorie des nombres [38], et les questions de Pascal devaient n'être pour lui que des problèmes plaisants, certes subtils, mais indignes de la vraie mathématique.

Bref, Fermat, en pur géomètre, ne s'intéresse pas à un problème qui en 1654 ne semblait pas promis aux développements *mathématiques* éclatants qu'il a eu par la suite. à propos, Fermat n'est-il pas le premier (un des premiers disons, car je n'en sais rien !) grand mathématicien à n'avoir été que mathématicien, inaugurant ainsi une division des savoirs contre laquelle il est de bon ton aujourd'hui de vociférer ? Si bien qu'on se demande si Pascal n'était pas ironique, ou plus probablement maladroit, quand dans le flot croissant de compliments qu'il adresse à Fermat, il finit par lui écrire qu'il fait "peu de différence entre un homme qui n'est que géomètre et un habile artisan" [39], pour immédiatement, bien sûr, l'exonérer de ce travers. Pascal, en bon philosophe, est au contraire stupéfait de voir "la fortune incertaine [...] si bien maîtrisée par l'équité du calcul" [40]. On comprend donc qu'il ait souhaité aller au-delà des questions purement techniques et calculatoires de la géométrie du hasard, sur des chemins que nous allons maintenant explorer en son agréable compagnie.

38. La théorie des nombres n'est évidemment pas totalement déconnectée de la combinatoire. Les combinaisons peuvent notamment être utilisées pour prouver ce qu'on appelle le Petit Théorème de Fermat : Si $a \geq 1$ est un entier et p un entier premier, alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p. J'ignore toutefois si Fermat a utilisé la preuve par les combinaisons pour démontrer sa célèbre congruence. Cela expliquerait en tout cas son aisance avec les combinaisons, sans pour autant contredire son absence d'enthousiasme pour la géométrie du hasard.

39. Lettre du 10 août 1660, tirée des *Œuvres complètes* de Pascal, au Seuil.

40. *Combinationes.*

4 Les fondements de la géométrie du hasard au XVII^{e} siècle

4.1 Position du problème

Parler du fondement de la théorie des probabilités au XVII^{e} siècle peut paraître anachronique. On considère généralement que la théorie des probabilités est établie sur des bases théoriques solides depuis les travaux de Kolmogorov dans les années 1930. Mais si l'on oublie un peu le sens actuel, formaliste pour dire vite, du fondement d'une théorie mathématique, on doit bien admettre que dès le XVII^{e} siècle, la nouvelle "géométrie du hasard", suspecte dans son appellation même, méritait bien, dans un sens ou un autre, d'être fondée sur quelque principe au moins, à défaut d'axiomes au sens où nous l'entendons depuis Hilbert. Mon point de vue n'est cependant pas de parler des fondements de la géométrie du hasard dans un sens faible (ordonner en un tout plus ou moins cohérent les techniques éparses du moment), mais bien dans le sens fort, celui qui convient aux travaux sur les fondements de l'analyse du XIX^{e} siècle par exemple.

Plutôt que d'attaquer de front le problème des fondements de la géométrie du hasard, je me propose de revenir sur l'énigme de la méthode 'pas à pas'. Au premier abord, il semble en effet qu'elle n'ait pas de nécessité mathématique, ni même historique. On imagine fort bien l'histoire générale des probabilités sans la méthode 'pas à pas'. Je donne peut-être ici l'impression de sombrer dans une erreur fort classique. Les mathématiques ont en effet l'étrange particularité qu'on les imagine facilement (et à tort) sans histoire du tout, et *a fortiori* sans Pascal. Les *éléments de mathématique* de Bourbaki ne prennent-ils pas les mathématiques "à leur début" [41], dans un sens qui n'a rien d'historique ? Imagine-t-on un traité de botanique qui prendrait la botanique à son début ?

Spéculer sur la nécessité historique de tel ou tel développement des mathématiques est donc souvent, je l'admets, tout à fait douteux. Toutefois, je maintiens que la méthode 'pas à pas' n'a pas de nécessité historique visible : Fermat semble se soucier comme d'une guigne des méthodes récurrentes de Pascal. Il n'y fait pas reférence une seule fois ; pour lui les combinaisons ne sont pas une peine, ne posent pas de problème majeur. Il est vrai qu'on l'a vu les manier avec une sûreté et une profondeur de vue inégalées à son époque. Bref, entre les mains de Fermat, on conçoit une géométrie du hasard plus conforme dès sa jeunesse à ce qu'elle est aujourd'hui. J'insiste : je ne me contente pas d'imaginer ce qu'aurait pu être tel ou tel développement des mathématiques qui n'a pas eu lieu. La correspondance montre que Fermat maîtrisait la technique d'une théorie

41. Je ne dis pas que Bourbaki considère que les mathématiques n'ont pas d'histoire. Mais les traités de Bourbaki commencent par un "Mode d'emploi" dont la première phrase est invariablement : "Ce traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc en principe aucune connaissance mathématique particulière". Il faut voir là une preuve de l'humour de Bourbaki, humour attesté par Raymond Queneau dans son essai *Bourbaki et les mathématiques de demain,* in *Bords* chez Hermann, 1978.

élémentaire des probabilités correspondant grosso modo au programme de nos chères terminales scientifiques. Hélas ou heureusement, qu'importe, Fermat n'a pas écrit de traité de théorie des jeux.

La méthode 'pas à pas' est donc singulière à tous égards : elle n'a pas été une étape nécessaire du développement de la théorie des probabilités, puisque la méthode des combinaisons, ancêtre apparent de nos conceptions actuelles, lui est antérieure. Pis, elle n'a été l'étape de rien du tout, n'étant pas le point de départ d'une éventuelle théorie concurrente ou complémentaire de la théorie classique des probabilités (du moins, cette théorie n'a-t-elle pas encore vu le jour). Afin de percer à jour les intuitions *a posteriori* mystérieuses de Pascal, nous allons donc nous lancer dans l'étude de son *Traité du triangle arithmétique*, qui présente l'avantage, par rapport à la correspondance, de donner non pas forcément le point de vue intime de Pascal, mais ce qu'il en voulait laisser voir à ses contemporains, à la postérité, à qui enfin se préoccupe de la Vérité.

4.2 Le *Traité du triangle arithmétique*

Vue d'ensemble

Sur la question du hasard et des mathématiques, le traité sérieux le plus ancien dont nous disposons est celui de Pascal, avec toutes les réserves de rigueur quant à la datation de sa forme définitive. La méthode 'pas à pas' y est developpée dans toute sa généralité. Voici pour fixer les idées le plan du *Traité* :

- Pascal commence par définir ce qu'est le triangle arithmétique, aujourd'hui communément appelé triangle de Pascal. Il donne des propriétés du système de coordonnées servant à en repérer les cellules. La figure 1 ci-dessous fournit une reproduction aussi fidèle que possible du triangle arithmétique, également reproduit sur l'encart détachable.
- Il donne ensuite des "conséquences" concernant les égalités rencontrées dans les cellules du triangle. Les démonstrations de ces égalités ne mobilisent que des outils très rudimentaires.
- Il consacre la suite de son *Traité* aux proportions qui se rencontrent dans ces cellules. Là, les démonstrations sont beaucoup plus techniques, et le raisonnement par récurrence, chose inhabituelle pour l'époque, joue un rôle majeur.
- Enfin, il pose et résout le problème de calculer le contenu d'une cellule du triangle de manière directe.
- Il fournit un traité annexe, *Divers usages du triangle arithmétique*, qui contient quatre parties :
  - "Usage du triangle arithmétique pour les ordres numériques", qui donne une application du triangle à la recherche des nombres polygonaux.
  - "Usage du triangle arithmétique pour les combinaisons", où Pascal montre que les nombres du triangle arithmétique sont des dénombrements de combinaisons.
  - "Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties", qui présente

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	G 1	σ 1	π 1	λ 1	μ 1	δ 1	ζ 1	1	1	1
2	φ 1	ψ 2	θ 3	R 4	S 5	N 6	7	8	9	
3	A 1	B 3	C 6	ω 10	ξ 15	21	28	36		
4	D 1	E 4	F 10	ρ 20	γ 35	56	84			
5	H 1	M 5	K 15	35	70	126				
6	P 1	Q 6	21	56	126					
7	V 1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

FIGURE 1 – Le triangle arithmétique.

en toute généralité la méthode ‘pas à pas’.

– “Usage du triangle arithmétique pour trouver les puissances des binômes et des apotômes”, qui présente l’importante formule du binôme.

La première ligne et la première colonne ne font pas, à proprement parler, partie du triangle. Elles ne servent qu’à en repérer les cellules. Pascal appelle “exposants” les nombres qu’elles contiennent. Rappelons comment sont définies les cellules du triangle arithmétique : on place le nombre 1 à la cellule G, (le “générateur”). Chaque cellule du triangle est alors définie comme étant la somme de la cellule qui se trouve à sa gauche, et de celle qui se trouve au-dessus. Par exemple, $C = \theta + B$. Les colonnes sont appelées “rangs perpendiculaires” et les lignes “rangs parallèles”. Chaque cellule a donc deux exposants (que nous appellerions plus volontiers coordonnées) : son “exposant parallèle”, et son “exposant perpendiculaire”. Les lignes obliques joignant des exposants égaux (celle qui contient 1, 3, 3 et 1 par exemple) sont appelées les “bases” du triangle. La ligne diagonale (qui contient 1, 2, 6, 20, 70 ...) est appelée la “dividente”.

Une lecture superficielle du *Traité* pose déjà des problèmes amusants. Il faudra qu’un jour un amateur d’études kabalistiques se penche sur la question du nom donné à chaque cellule du triangle, qui repose sur une nomenclature

aujourd'hui tombée en désuétude[42] : chaque cellule est désignée par une lettre latine ou grecque, le rapport entre la position de la cellule et sa lettre échappant à toute logique raisonnable.

Les amateurs de l'histoire du nombre zéro — il y en a — prêteront une attention particulière à la démonstration de la Conséquence première, où, pour prouver que le premier rang perpendiculaire du triangle ne contient que des 1, Pascal fait remarquer que l'application du principe de génération des cellules revient, pour les cellules de ce rang, à additionner un zéro à leur cellule d'au-dessus.

Mais ce qui frappe le plus aujourd'hui, c'est la manière géométrique dont Pascal définit le triangle. Il mène explicitement des parallèles, des perpendiculaires ...toutes choses aujourd'hui secondaires, les relations algébriques entre les cellules étant privilégiées. Gardons-nous de ne voir là qu'un des archaïsmes pittoresques qui parsèment les textes d'époque. La suite prétend au contraire montrer que la géométrie du hasard de Pascal était réellement imprégnée de géométrie.

Tout au long du *Traité*, Pascal convient implicitement de confondre abusivement une cellule et le nombre qu'elle contient. à la Conséquence neuvième, il est même prouvé qu'une base est "égale" à une somme d'autres bases, alors qu'en toute rigueur, nous dirions aujourd'hui que l'égalité concerne les nombres contenus dans les bases. On reconnaît là une habitude de la géométrie ancienne présente déjà dans les *éléments* d'Euclide, qui consiste à dire par exemple que deux triangles sont égaux si, dirions-nous aujourd'hui, on les peut superposer modulo une isométrie du plan, ou que deux angles sont égaux s'ils ont même mesure ... Cela suggère que Pascal espérait véritablement construire une *géométrie* du hasard, où les nombres du triangle joueraient un rôle comparable aux notions de surface ou d'angle. D'ailleurs, quand Pascal fait intervenir le nombre zéro, dans la preuve de la Conséquence première, il pense peut-être plus à une quantité métrique (surface, angle nul ...) qu'à l'élément neutre de l'addition, autrement dit dans un jargon moins furieusement tendance, ce qui reste quand on n'additionne rien du tout. Mais c'est là un point accessoire, il y en a de plus probants :

Au début du *Traité*, Pascal remarque que la somme des deux exposants d'une cellule ne dépend que de la base où elle se trouve. Ce résultat évident, "plutôt compris que démontré", repose selon Pascal sur la division "en un pareil nombre de partie" des deux côtés orthogonaux du triangle. Je ne vois pas bien le lien démonstratif entre ces deux propositions, mais je vois un penchant certain à se référer à des raisonnements métriques à la Thalès. En tout cas, si l'on devait réécrire tout cela aujourd'hui, on ne tenterait en aucun cas de se ramener à des propriétés du triangle, mais plutôt à de laborieuses considérations sur des incrémentations d'indices.

Sans tirer de conséquences trop audacieuses de ce qui vient d'être avancé, on peut néanmoins conclure que Pascal, grand lecteur d'Euclide, cherchait à

42. On m'objectera que cette pratique subsiste encore dans le choix les sigles en vigueur à l'administration du M.E.N.. Je rétorque que le recours aux lettres grecques n'y est pas encore trop répandu.

imiter, inconsciemment peut-être, ce qui se faisait encore de mieux en matière de rigueur et de démonstration à son époque : la géométrie euclidienne. Plus avant, nous en rencontrerons un indice plus profond.

Le style agréable de Pascal mérite aussi une mention, car il risque de tromper un lecteur pressé. Ses textes mathématiques sont en effet écrits dans une langue remarquable, avec tant d'aisance qu'on peut avoir la fausse impression qu'il ne démontre pas grand chose, qu'il se contente de décrire avec élégance quelque vérité que lui aurait suggérée son intuition. Cette impression est notablement accentuée par l'usage original qu'il fait du *nombre générique*. Là où un auteur moderne désignerait les cellules du triangle par des variables, Pascal préfère utiliser des exemples particuliers, ce qu'on considère généralement comme monstrueux, les mathématiques n'ayant que faire de cas particuliers. Mais il le fait avec une telle habilité que la rigueur n'en pâtit pas. Regardons par exemple comment Pascal prouve la Conséquence seconde de son traité :

CONSÉQUENCE SECONDE

En tout Triangle arithmétique, chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallèle précédent, comprise depuis son rang perpendiculaire jusqu'au premier inclusivement

Soit une cellule quelconque ω : je dis qu'elle est égale à $\mathtt{R} + \theta + \psi + \varphi$, qui sont celles du rang parallèle supérieur depuis le rang perpendiculaire de ω jusqu'au premier rang perpendiculaire.

Cela est évident par la seule interprétation des cellules par celles d'où elles sont formées.

Car ω égale $\mathtt{R} + \mathtt{C}$.

$$\overbrace{\theta + \mathtt{B}}$$
$$\overbrace{\psi + \mathtt{A}}$$
$$\overbrace{\varphi}$$

car $\mathtt{A}$ et φ sont égaux entre eux par la [conséquence] précédente.

Donc ω égale $\mathtt{R} + \theta + \psi + \varphi$.

évidemment, à nos yeux, la cellule ω n'a rien de "quelconque", puisque ω n'est pas une variable mais une cellule particulière du triangle. Pourtant, on voit bien que le raisonnement fait avec ω peut être recommencé avec n'importe quelle cellule du triangle. C'est tout l'art du nombre générique : écrire un raisonnement sur un cas particulier, mais en prenant bien garde que le raisonnement puisse être reproduit mécaniquement sur les autres cas. Dans ce cas précis, on voit à quelle économie de notation conduit un usage habile du nombre générique.

Le raisonnement par récurrence

À partir de la Conséquence douzième, le *Traité* prend une tournure différente. D'abord, Pascal ne s'intéresse plus aux "égalités qui se rencontrent dans le triangle", mais aux "proportions". Il s'agira par exemple de calculer des rapports de cellules adjacentes du triangle. Cette distinction, aujourd'hui un peu spécieuse, se retrouve curieusement dans les *éléments* d'Euclide, ce qui mérite quelque éclaircissement : le théorème de Thalès est le premier qui dans l'ordre de démonstration des résultats de la géométrie classique fasse obligatoirement intervenir la notion de nombre réel. Le premier, car le théorème de Pythagore par exemple peut s'exprimer en termes de surfaces et se prouver par des 'couper-coller' [43]. En effet, le théorème de Thalès se rapporte aux proportions, chose difficilement réductible à des notions de pure géométrie. Une théorie des nombres réels est donc indispensable, et est effectivement présente au Livre cinquième des *éléments*.

43. Techniquement, dans les *éléments*, le théorème de Pythagore n'est pas prouvé par des 'couper-coller' mais par la constance de la surface d'un triangle lorsque qu'un de ses sommets se déplace le long de la droite parallèle au côté opposé. Mais la démonstration de cette constance fait quant à elle intervenir des 'couper-coller' justifiés par des cas d'égalité des triangles, qui sont donc en dernière analyse l'argument utilisé.

Par une étrange analogie, Pascal marque une rupture au moment de s'attaquer aux proportions. Cette rupture ne concerne pas seulement la nature des résultats énoncés, mais aussi leur démonstration : le raisonnement par récurrence y tient une place inhabituelle pour l'époque. Pour nous en faire une idée précise, admirons un peu cette Conséquence douzième :

Conséquence Douzième

En tout Triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusqu'au haut de la base à la multitude de celles depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement

Avec E et C, par exemple, qui sont sont bien contiguës dans une même base, Pascal dit que E est à C comme 2 à 3, ce que nous dirions aujourd'hui $\frac{E}{C} = \frac{2}{3}$. 2 "parce qu'il y a deux cellules [dans la base] depuis E jusqu'en bas, savoir E, H" et 3 "parce qu'il y a trois cellules depuis C jusqu'en haut, savoir C, R, μ".

La démonstration commence par énoncer le principe de la démonstration par récurrence. Premier "lemme" : la proportion est évidente dans la seconde base car "ψ est à σ comme 1 à 1". D'autre part, second lemme, si elle "se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante." Avant de démonter ce dernier lemme, Pascal explique :

> D'où il se voit qu'elle [la proportion] est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme ; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième et à l'infini.

On voit que le raisonnement par récurrence n'est pas chez Pascal un moyen technique imaginé pour faire l'économie du concept d'infini actuel dans des démonstrations ayant "une infinité de cas", rôle que d'autres mathématiciens ont pu en d'autres temps lui faire tenir. Pascal n'hésite pas à dire "et ainsi à l'infini" ; après quoi, il se garde bien de mettre des points de suspension. D'ailleurs, dans la preuve de la Conséquence huitième, écrite sans raisonnement par récurrence, Pascal termine aussi son argumentation par un courageux "et ainsi à l'infini". Pour ce qui est de son utilisation en mathématiques, l'infini ne l'effrayait pas.

Mais revenons à la conséquence douzième car la démonstration de son second lemme est intéressante. étant donné le temps que j'ai passé à essayé de la comprendre, j'ai l'impression que, faute de notations modernes, elle manque de clarté. L'usage systématique du nombre générique montre ici ses limites. Quand Pascal parle de 2, de 3 ou de 4, on ne sait plus du tout d'où viennent ces nombres, et on a du mal à saisir le caractère démonstratif du discours. Voici donc une version modernisée, mais fidèle dans ses enchaînements de la preuve de Pascal :

Pour une cellule X, notons V_X sa valeur, L_X son rang dans sa base compté à partir de la gauche et R_X son rang dans sa base compté à partir de la droite. Par exemple, $L_B = 2$ car en partant de la gauche, dans la base de B on rencontre 2 cellules : D et B. Et $R_B = 3$ car en partant dans la base de B on rencontre 3 cellules : λ, θ et B. Nous parviendrons à nos fins en trois étapes :

1. Par hypothèse de récurrence, $\frac{V_D}{V_B} = \frac{L_D}{R_B}$

   Donc, $\frac{V_D}{V_B} + 1 = \frac{L_D}{R_B} + 1$ et $\frac{V_D+V_B}{V_B} = \frac{L_D+R_B}{R_B}$.

   Or, $V_D + V_B = V_E$ par construction du triangle arithmétique. Donc,

   $$\frac{V_E}{V_B} = \frac{L_D + R_B}{R_B}$$

2. De même, par hypothèse de récurrence, $\frac{V_B}{V_\theta} = \frac{L_B}{R_\theta}$

   Donc, $\frac{V_\theta}{V_B} + 1 = \frac{R_\theta}{L_B} + 1$ et $\frac{V_\theta+V_B}{V_B} = \frac{R_\theta+L_B}{L_B}$.

   Or, $V_\theta + V_B = V_C$ par construction du triangle arithmétique. Donc,

   $$\frac{V_C}{V_B} = \frac{R_\theta + L_B}{L_B}$$

3. Pour conclure, utilisons les propriétés du système de coordonnées repérant les cellules : $L_D + R_B = R_\theta + L_B$, car ces deux sommes sont égales au nombre S de cellules de la base contenant les cellules contiguës D, B et θ. D'autre part, $R_B = R_C$ car C est à droite de B, et $L_B = L_E$ car E est en dessous de B.

   Finalement, en reportant ces égalités dans les égalités trouvées aux points 1. et 2. on trouve :

   $$\frac{V_E}{V_B} = \frac{S}{R_C} \qquad \text{et} \qquad \frac{V_C}{V_B} = \frac{S}{L_E}$$

   Et en divisant ces deux égalités, on obtient bien par la simplification que Pascal appelle “la proportion troublée” :

   $$\frac{V_E}{V_C} = \frac{L_E}{R_C}$$

Si j'inflige ce kroupnik [44], au lecteur, ce n'est pas par manie professionnelle d'assommer mes semblables avec des calculs, mais pour montrer encore une fois le caractère géométrique des méthodes de Pascal. Il me semble naturel de suivre cette démonstration le triangle sous les yeux. à chaque étape, l'œil ou l'index en parcourt les cellules pour persuader la raison. Si $R_B = R_C$, n'est-ce pas parce que $\lambda BC\mu$ est un parallélogramme ? N'a-t-on pas l'impression que si V_B se simplifie à la fin du calcul, c'est au fond parce que B se trouve au *milieu* de D et θ ? La “proportion troublée” n'est-t-elle pas le pendant algébrique d'une sorte de relation de Chasles ? Mais étant donné le caractère subjectif de tout ceci, je laisse le lecteur en juger par lui-même ...

À partir de la Conséquence douzième, Pascal peut égrainer toute la série de proportions qui en découle, pour finalement aboutir à “l'accomplissement de [son] traité” : le calcul direct de la valeur d'une cellule connaissant seulement son exposant parallèle et son exposant perpendiculaire.

J'espère avoir été convaincant : si le nom de l'ancêtre de la théorie des probabilités fut “géométrie du hasard”, c'est bien dans le sens précis du mot géométrie qu'il faut l'entendre.

44. Étouffe-chrétien.

Le problème des partis dans le *Traité*

Dans la troisième partie des *Divers usages du triangle arithmétique*, Pascal explique comment faire le parti entre deux joueurs à l'aide du triangle arithmétique. Sa méthode repose sur les deux principes suivants :

- "Si un des joueurs se trouve en telle condition que, quoi qu'il arrive, une certaine somme lui doit appartenir en cas de perte et de gain, sans que la hasard la lui puisse ôter, il n'en doit faire aucun parti, mais la prendre entière comme assurée parce que le parti devant être proportionné au hasard, puisqu'il n'y a nul hasard de perdre, il doit tout retirer son parti."
- "Si deux joueurs se trouvent en telle condition que, si l'un gagne, il lui appartiendra une certaine somme, et s'il perd, elle appartiendra à l'autre ; si le jeu est de pur hasard et qu'il y ait autant de hasard pour l'un que pour l'autre et par conséquent non plus de raison de gagner pour l'un que pour l'autre, s'ils veulent se séparer sans jouer, et prendre ce qui leur appartient légitimement, le parti est qu'ils séparent la somme qui est au hasard par la moitié, et que chacun prenne la sienne."

En voyant ces principes, on se demande aujourd'hui spontanément s'ils sont une définition de ce qu'est le parti, ou s'ils sont des lois en régissant le calcul. Bien sûr, chez Pascal, on se trouve dans le second cas, les concepts mathématiques n'ayant pas à son époque le statut arbitraire que nous leur connaissons. Mais en grand géomètre, Pascal manipule ses principes exactement comme s'il s'agissait de définitions. C'est-à-dire que presque rien d'extérieur à eux ne vient étayer les démonstrations. Je dis 'presque' car, on le voit bien, les principes présentent une lacune : dans n'importe quel jeu, du moins dans le genre de jeu auquel Pascal s'intéresse, nul ne peut être assuré d'un quelconque gain avant la victoire. Comme peut-il alors y avoir une "somme assurée" ? Bien sûr, se poser pareille question dénote une compréhension erronée des principes de Pascal, qui ne doivent être utilisés qu'à bon escient lors de démonstrations récurrentes, comme on l'a vu dans la méthode 'pas à pas'. Ce qui finalement nous conduit bien à déceler une lacune : c'est l'usage bien compris des principes qui déterminera seul les endroits précis où l'on est en droit de les utiliser.

Si on devait réécrire selon nos critères de rigueur les principes de Pascal, on préciserait donc sans doute que la "certaine somme" qui "doit appartenir [au joueur] en cas de perte et de gain, sans que la hasard la lui puisse ôter" doit s'entendre comme une certaine somme provenant d'un calcul qui utilise le premier principe. On parvient donc à éradiquer la lacune au prix d'une apparente inconsistance logique : le premier principe fait usage dans sa propre définition du premier principe. En fait il n'y là aucune inconsistance : quiconque à l'habitude de l'informatique, de la logique mathématique ou de la linguistique formelle dira simplement, chacun selon ses usages, qu'on est en présence d'une définition récursive, inductive [45], ou encore générative, du parti à faire entre

45. Le mot 'induction' est utilisé ici dans le sens qu'on lui donne en logique mathématique, à ne pas confondre avec l'"opération mentale qui consiste à remonter des faits à la loi" chère aux sciences naturelles. Voir par exemple *Logique mathématique* par René Cori et Daniel Lascar, tome 1, chez Masson, 1994, page 20.

deux joueurs [46]. Le parti à un moment t_1 du jeu dépend certes du parti associé à un autre moment t_2 du jeu, mais t_2 est antérieur à t_1. Et par la remarque — étrangement semblable au principe de descente infini de Fermat — qu'une partie ne peut durer depuis un temps infini, puisque s'il est possible d'aller vers l'infini, il est bien sûr impossible d'en venir, on voit que les applications successives du principe mèneront à la détermination du juste parti en un nombre fini d'étapes.

Cette longue digression peut laisser la désagréable impression d'une réinterprétation *a posteriori* des textes de Pascal. Toutefois, il est certain que les deux principes *sont* inductifs, ce qui est à mettre au crédit du génie de Pascal. Ce n'est pas tout : ils frappent par leur actualité. De la loterie nationale aux marchés boursiers dérivés en passant par les assurances, notre époque en est toute imprégnée. Dans notre société, on peut acheter ou vendre des biens qui ne sont rien d'autre que de l'espérance mathématique. Pascal est le premier à avoir découvert (ou inventé ?) l'existence de ce bien immatériel.

Après avoir énoncé ses deux principes, Pascal expose la manière dont ils s'appliquent à la méthode 'pas à pas', qui apparaît alors pour ce qu'elle est vraiment : une démonstration non pas par récurrence mais par induction. Si ces passages du *Traité* n'ont pas connu la célébrité des quelques lignes de la lettre du 29 juillet 1654, c'est parce qu'à mon avis ils sont moins clairs. Pascal commet la maladresse de commencer son induction par le bas [47], c'est-à-dire en traitant d'abord les cas les plus simples :

> *Premier cas*
>
> *Si à un des joueurs il ne manque aucune partie, et à l'autre quelques-unes, la somme entière appartient au premier.* Car il l'a gagnée [...]
>
> *Second cas*
>
> *Si à un des joueurs il manque une partie et à l'autre une* [...]
>
> *Troisième cas*
>
> *Si à un des joueurs il manque une partie et à l'autre deux* [...]
>
> ⋮

46. Gardons-nous cependant de dire que Pascal est le premier dans l'histoire à faire usage de ce type de définitions. On peut lire dans *Compilation, principes, techniques et outils*, 1989, chez Interéditions, ouvrage connu des informaticiens sous le sobriquet de 'dragon rouge' : "L'érudit [indien] Panini imagine une notation syntaxique pour spécifier la grammaire du Sanscrit", au III^{e} siècle avant J.-C.. Ces notations syntaxiques, appelées syntaxes BNF (Backus Naur Form) en informatique, sont des ensembles de règles inductives de spécification d'une syntaxe. On les retrouve en linguistique sous le nom de grammaires génératives, inventées par Noam Chomsky. Les adeptes de l'érudit Pānini peuvent à ce qu'il paraît consulter *Panini-Backus form suggested*, Ingerman, 1967, Communication ACM, 10-3, p.137.

47. Précaution élémentaire quand on critique quelqu'un comme Pascal, prendre comme caution un grand mathématicien : "The feeling that this sort of treatment [les récurrences] adds to the precision of an inductive argument is much too common and is responsible for the introduction of many irrelevancies in the literature". *On numbers and games*, Jonh H. Conway, Academic Press Inc. (London) Ltd, 1976, page 64.

Ensuite Pascal peut démontrer par récurrence l'utilité des cellules du triangle arithmétique pour le problème des partis, utilité qui ne surprendra personne : ces cellules servent à calculer des combinaisons [48], et les combinaisons servent à calculer les partis. Mais cela, Pascal ne l'a pas dit dans son traité, bien qu'il le sût ... La démonstration du lien entre le triangle et le problème des partis est donc nécessairement un peu alambiquée, et fait évidemment appel au raisonnement par récurrence :

Pascal explique d'abord que pour trouver le parti entre deux joueurs à qui il manque n parties, il faut prendre la $n^{\text{ième}}$ base du triangle, la séparer en deux blocs de cellules contiguës, de sorte que chaque bloc ait autant de cellules qu'il y a de victoires manquantes pour chaque joueur. Le partage se fait au prorata de ces deux nombres. Par exemple, s'il manque deux parties au premier joueur et trois au deuxième, le parti est de $\frac{1+4+6}{16}$ et $\frac{4+1}{16}$, comme la méthode 'pas à pas' le montrait d'ailleurs dans la lettre du 29 juillet 1654. La récurrence se fait sur n. Le passage de base en base du triangle repose sur les deux principes et les propriétés des cellules prouvées au début du *Traité*.

4.3 Nouvel éclairage sur la méthode 'pas à pas'

Au terme de notre exploration des textes de Pascal et de Fermat, nous pouvons enfin reprendre l'analyse des fameuses lignes de la lettre du 29 juillet 1654.

La place centrale d'une méthode désuète

Revenons tout d'abord sur les motivations de Pascal. Avec sa géométrie du hasard, il est conscient d'inventer une théorie nouvelle qui met en jeu des conceptions profondément ancrées chez l'homme : le hasard, la providence ...Et si on imagine la très docte Académie parisienne admettant la supériorité de la méthode des combinaisons sur toute autre considération (Tartaglia ...), si on l'imagine encore prêtant un statut de vérité géométrique au calcul des partis, on conçoit mal en revanche que Pascal ait pu se contenter du concensus des savants de l'époque pour affermir ses vues. Il lui fallait quelque chose de solide, de sûr.

Or, du côté des combinaisons, on est dans le règne des polémiques, des justifications hasardeuses, où Pascal lui-même perd pied. La notion de probabilité, esquissée par Fermat, devait avoir pour Pascal le statut d'un de ces abus de langage commodes, qui permettent d'appréhender un problème et, pourquoi pas, d'en trouver sans faille la solution, mais en aucun cas de le résoudre en conscience et en vérité. Car Pascal est un géomètre, et son souci, nous l'avons montré, est d'intégrer sa géométrie du hasard à la géométrie tout court : le *Traité du triangle arithmétique* est d'inspiration euclidienne et, par un véritable tour de force (l'utilisation de l'induction et de la récurrence), Pascal parvient

48. Pascal montre, à la deuxième partie des *Divers usages du triangle artihmétique*, que les cellules du triangle dénombrent des combinaisons, grâce à ce qu'on appelle aujourd'hui la formule de Pascal : $\binom{p}{n} = \binom{p-1}{n-1} + \binom{p}{n-1}$.

à asseoir le calcul des partis sur deux principes naturels, des axiomes serait-on tenté de dire, desquels découlent tous les calculs.

Bref, en un sens Pascal a bien fondé une géométrie du hasard. Nous ne prétendrons pas comparer l'approche de Pascal avec celle de Kolmogorov par exemple, ce qui serait cette fois franchement anachronique. Mais je pense que le *Traité du triangle arithmétique* garde une certaine actualité dans la mesure où les principes sur lesquels il fonde les probabilités sont des principes d'un sens commun dont nos théories ne se soucient plus guère, ce qui fait d'ailleurs leur force moderne. Les axiomes de Kolmogorov n'ont en effet rien d'axiomes au sens de vérités évidentes. La théorie moderne des probabilités est abstraite. Elle a toutefois un point d'ancrage sur le sens commun : le point de vue fréquentiste. Dire qu'un événement a une probabilité p de se produire implique qu'une série de n épreuves fera se produire cet événement avec une fréquence qui tend à se rapprocher de p quand n tend vers l'infini. Ce résultat se démontre en théorie des probabilités, mais ce qui nous intéresse ici, le fait qu'il dise réellement quelque chose sur le monde, n'est plus aujourd'hui du ressort des mathématiques. Le seul avantage du point de vue fréquentiste reste donc qu'il peut se vérifier expérimentalement pour de grandes valeurs de n. J'aimerais bien savoir ce que Pascal aurait pensé de ce point de vue, lui qui, ne l'oublions pas, a écrit prophétiquement que l'infini "est cependant un nombre" [49].

En attendant, on s'explique enfin pourquoi Pascal ne parle pas de la méthode par les combinaisons dans son traité. Sûrement pas parce c'est une méthode qu'il maîtrise mal : après sa correspondance avec Fermat, il détient un savoir lui permettant d'éviter ses erreurs passées. C'est plutôt parce que selon Pascal, cette méthode fonde ses preuves sur un jugement vague, sans qu'on arrive à les réduire à des principes évidents. On me rétorquera que Pascal, grâce à son *Traité* pouvait très bien justifier la méthode par les combinaisons, les cellules du triangle faisant le lien avec le problème des partis. Mais de la sorte, il aurait vidé la méthode par les combinaisons de sa substance, qui est de se fonder sur des dénombrements. Car par le moyen du triangle arithmétique, il aurait certainement pu montrer que le nombre qui est égal à une certaine combinaison sert à calculer les partis. Mais il aurait été bien en peine d'expliquer dans les canons de la rigueur le lien entre la nature de la combinaison (un dénombrement) et le juste parti, il n'aurait pu montrer par quel principe sa méthode diffère de celle de Pacioli. Aujourd'hui encore, selon moi, ce principe reste mystérieux, plus compris que démontré. Les constructions de Pascal, quant à elles, offrent une approche raisonnable du hasard, mathématiquement dépassée, mais satisfaisante pour l'esprit.

La méthode 'pas à pas' ou, comme Pascal l'écrivait à Fermat, "mon autre méthode universelle, à qui rien n'échappe et qui porte sa démonstration avec soi" [50], est donc la brillante synthèse d'un travail de grande ampleur. Sans en avoir l'air, elle incorpore tout l'outillage technique et conceptuel du *Traité du triangle arithmétique*. On peut lui reprocher d'être particulière : on voit mal com-

49. Pensée n° 233.
50. Lettre du 24 août 1654.

ment l'appliquer à des problèmes complexes de boules colorées tirées d'urnes avec ou sans remise. Je lui reprocherais surtout de n'être pas naturelle. La première idée, la bonne idée, qui vient pour résoudre le problème des partis, dès les essais de Pacioli et aujourd'hui encore, est bien de compter les chances de chacun. Voyons cela comme un indice supplémentaire : c'est un défaut habituel des travaux de fondement des mathématiques que de s'embarrasser de constructions aussi peu naturelles que l'identification d'un nombre réel à une coupure de l'ensemble des nombres rationnels.

Origine de la méthode 'pas à pas'

Quand Pascal a-t-il imaginé la méthode 'pas à pas' ? Nous n'avons pas de documents précis sur la question et en sommes donc réduits à des spéculations. On peut toutefois prendre appui sur deux indices :

- À propos de la méthode des combinaisons, Pascal écrit à Fermat : "Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche" [51]
- À propos du calcul direct d'une cellule du triangle par les exposants — "l'accomplissement" de son traité — Pascal écrit : "M. de Gagnières me communiqua lui-même cette excellente solution et me proposa même d'en chercher la démonstration ; j'admirai le problème, mais effrayé par la difficulté, je pensai qu'il convenait d'en laisser la démonstration à son auteur ; cependant, grâce au triangle arithmétique, une voie aisée me fut ouverte pour y parvenir" [52].

Le premier indice montre, nous le savions déjà, que Pascal a trouvé la méthode par les combinaisons avant la méthode 'pas à pas'. Quant au deuxième, il montre que Pascal savait déjà une partie de ce qu'il voulait prouver quand il a commencé à s'intéresser au triangle, que le triangle n'a pas été pour lui un moyen de découverte mais de démonstration. On peut donc supputer que la méthode 'pas à pas' est à la fois postérieure aux découvertes combinatoires de Pascal et à la méthode par la combinaison.

Pascal aurait donc trouvé la méthode 'pas à pas' en ayant tous les outils en main : il savait que les partis sont liés aux combinaisons, il savait comment manipuler ces dernières à l'aide du triangle arithmétique. Se dessine alors un scénario possible : il cherche à fonder la géométrie du hasard. Il voit dans les méthodes par récurrence du triangle le moyen technique de parvenir à ses fins. L'analyse fine du lien entre triangle et combinaisons lui suggère alors une adaptation directe des méthodes du triangle au problème des partis. Finalement il découvre plutôt qu'il n'invente ses deux principes après coup, comme des justifications des passages de base en base utilisés lors de la récurrence prouvant le lien entre le triangle et les partis. Les récurrences et l'induction sont alors le fruit d'une reflexion sur la nature de ces justifications. La méthode 'pas à pas' vient en dernier, synthèse de ce travail, et non point de départ.

51. Lettre du 29 juillet 1654.
52. *Combinationes*, paragraphe antépénultième.

Nous savons déjà que Pascal envisage la méthode ‘pas à pas’ comme un moyen de fonder sa géométrie du hasard. Cela aurait pu lui apparaître après qu’il l’a inventée. Si nos hypothèses sont exactes, ce ne serait pas ainsi que les choses se passèrent : la méthode ‘pas à pas’ serait bien une découverte issue de recherches sur les fondements de la géométrie du hasard.

5 Conclusion

Les débuts de la géométrie du hasard nous ont permis de côtoyer deux des plus grands esprits du XVII^{e} siècle. Ceux qui pensent que les mathématiciens n'ont pas de style devraient s'intéresser à ces deux là :

Fermat, le pur mathématicien qui, avec son intuition presque innée des probabilités, ne se trompe jamais. Qui pourtant ne voit pas en cette nouvelle géométrie du hasard la grande découverte qu'elle réprésente pour nous, à la manière de ces Vickings qui accostèrent au Canada sans découvrir l'Amérique.

Et Pascal, dont les textes traduisent une véritable obsession de plier la nouvelle géométrie du hasard aux canons de l'authentique rigueur mathématique dans ce qu'elle a de plus noble : éclairer l'esprit. Ce programme insensé, il n'a pu en venir à bout qu'au prix de l'invention de nouvelles démarches : l'induction et l'usage systématique du raisonnement par récurrence nous sont légués pour toujours. Pourtant, les idées de Pascal sur la manière de fonder cette science sont absentes de la théorie des probabilités telle qu'on la pratique.

C'est que, comme le disait Ludwig Wittgenstein, "les problèmes *mathématiques* de ce que l'on appelle les fondements sont aussi peu pour nous au fondement des mathématiques que le rocher peint supporte le château peint." [53] L'induction et le raisonnement par récurrence, problèmes *mathématiques* du fondement de la géométrie du hasard, ne la fondent en rien, et sont aujourd'hui remplacés par d'autres techniques, d'autre concepts. Et ce qui devrait vraiment fonder la géométrie du hasard, les deux principes de Pascal, ne sont plus du ressort de nos mathématiques.

On regrettera peut-être que je n'ai pas parlé d'éventuelles conditions extérieures aux développement des mathématiques, qui auraient favorisées les travaux de Pascal et Fermat. Sur ce point, je pense qu'une recherche sur le chevalier de Méré, qui a publié des ouvrages juridiques, serait intéressante. Après tout, c'est lui qui pose le problème des partis à Pascal. Sur l'état général des idées au XVII^{e} siècle, on pourra se reporter à un article de Norbert Meunier, *L'émergence d'une mathématique du probable au XVII^{e} siècle* [54].

Mais on regrettera peut-être surtout qu'il n'ait pas été question de philosophie dans tout ce qui précède. Curieusement, Pascal lui-même parle très peu de sa géométrie du hasard dans son œuvre philosophique. En toute franchise je n'ai pas lu tout Pascal. Des recherches rapides mais efficaces m'ont pourtant convaincu qu'en dehors du *Pari* et des textes proprement mathématiques, il n'y a rien dans son œuvre sur la géométrie du hasard. Peut-être est-ce à cause de l'expérience mystique du *Mémorial*, qui le 23 novembre 1654 va changer la vie de Pascal et l'engager dans d'autres aventures. Peut-être aussi parce que le *Traité du triangle arithmétique* est finalement à ranger au sein même de l'œuvre philosophique de Pascal.

53. Citation empruntée à *Le philosophe et le réel, entretiens avec Jean-Jacques Rosat*, p.18, par Jacques Bouveresse, Chez Hachette, 1998.

54. *Revue d'histoire des mathématiques*, 2 (1996), p. 119–147.

A Le *Pari* de Pascal

Je ne m'étendrai pas sur la question du *Pari* de Pascal [55], liée à des questions théologiques et philosophiques sur lesquelles je suis à peu près incompétent. Le texte du *Pari* est tiré des *Pensées* de Pascal, qui sont les brouillons d'un ouvrage sur lequel il travaillait : *Apologie pour la Vérité de la Religion Chrétienne*. On ne sait pas exactement quand il commença à composer cette œuvre, mais en 1658 il classa ses notes "en diverses liasses" [56]. La grande expérience mystique de Pascal, relatée dans son *Mémorial* [57], date quant à elle, par une coïncidence dont je laisse le lecteur libre de tirer ce qu'il lui plaira, du 23 novembre 1654, soit moins d'un mois après la dernière lettre de Pascal à Fermat touchant au problème des partis, sa lettre du 27 octobre 1654.

Dans l'optique de ce mémoire, le texte du *Pari* présente la curiosité d'être l'unique endroit où, à la manière de Fermat, Pascal fait intervenir des notions de probabilités relativement conformes à ce qu'on rencontre aujourd'hui. Pascal considère une probabilité tendant vers 0, (les chances selon un incroyant d'accéder à la vie éternelle par la piété) et un gain qui est lui infini (cette vie éternelle justement) :

> Mais il y a une infinité de vie et de bonheur. Et cela étant, quand il y aurait une infinité de hasards dont un seul serait pour vous, vous auriez encore raison de gager un pour avoir deux, et vous agiriez de mauvais sens, étant obligé à jouer, de refuser de jouer une vie contre trois à un jeu où d'une infinité de hasard il y en a un pour vous, s'il y avait une infinité de vie infiniment heureuse à gagner. Mais il y a ici une infinité de vie infiniment heureuse à gagner, un hasard de gain contre un nombre fini de hasards de perte, et ce que vous jouez est fini. Cela ôte tout parti : partout où est l'infini, et où il n'y a pas infinité de hasard de perte contre celui de gain, il n'y a point à balancer, il faut tout donner.

Mathématiquement, cela se tient à peu près, exception faite de "l'infinité de hasard dont un seul serait pour vous", qui donne l'idée d'une probabilité nulle d'accéder au gain infini, et conduit donc à une espérance de gain finale délicate à calculer : $0 \times \infty$. Toutefois, Pascal ne retombe pas dans cette erreur par la suite, puisqu'il prend soin de préciser que son argumentation est valable partout "où il n'y a pas infinité de hasard de perte", ce qui exclut la probabilité nulle — à mettre sur le compte de l'ardeur d'une plume un peu leste. Rappelons-nous que le texte du *Pari* n'est qu'un brouillon.

Toujours en rapport avec notre sujet, une discussion passionnante sur l'infini précède le passage du *Pari*. C'est une étrange coïncidence vu le rôle que l'infini était appelé à jouer par la suite en théorie des probabilités (point de vue fréquentiste, σ-additivité, mesure de Lebesgue ...). Pascal lui-même a certainement dû méditer sur l'infini lorsqu'il mettait au point son principe de

55. Je m'appuie sur le texte de la Pensée n° 233 dans l'édition du Livre de poche des *Pensées*.
56. Information tirée de l'introduction aux *Pensées* des *Œuvres complètes* éditées au Seuil.
57. Page 249 dans l'édition Livre de poche des *Pensées*.

démonstration par récurrence et ses méthodes par induction. Mais l'infini dont il est question dans les *Pensées* est introduit dans un cadre un peu extérieur aux probabilités : il s'agit surtout de justifier mathématiquement l'idée d'un gain infini à un jeu, un jeu dans lequel nous sommes tous embarqués.

B Le traité de Huygens

En 1656, Huygens publie un petit traité, *Du calcul dans les jeux de hasard*, qui fera date puisque le *Traité du triangle arithmétique* de Pascal n'a été publié qu'en 1665 [58]. Cet ouvrage ingénieux part de la même idée que celui de Pascal : donner un fondement rigoureux à la géométrie du hasard naissante. Mais il a moins d'ampleur. Destiné à indiquer rapidement comment résoudre quelques problèmes, il se présente donc différemment. Chez Huygens, la proposition centrale est la suivante :

> Proposition III
>
> Avoir p chances d'obtenir a et q chances d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$.

On est manifestement plus proche que chez Pascal des idées actuelles. On comprend bien aujourd'hui l'intérêt de la proposition de Huygens, que l'on perçoit comme une définition de l'espérance mathématique. Mais Huygens, dans la lignée de Pascal, a souhaité prouver son résultat. Il donne donc un principe : "dans un jeu, la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si l'on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable". Ce principe me semble quelque peu confus, et l'usage qu'en fait Huygens dans sa Proposition I permet de l'éclairer :

> Proposition I
>
> Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut $\frac{a+b}{2}$.
>
> Afin de non seulement démontrer cette règle, mais aussi de la découvrir, appelons x la valeur de ma chance. Il faut donc que, possédant x, je puisse me procurer de nouveau la même chance par un jeu équitable. Supposons que ce jeu soit le suivant. Je joue x contre une autre personne, dont l'enjeu est également x. Il est convenu que celui qui gagne donnera a à celui qui perd. Ce jeu est équitable, et il appert que j'ai ainsi une chance égale d'avoir a en perdant, ou $2x-a$ en gagnant le jeu ; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $2x$, duquel je dois donner a à l'autre joueur. Si $2x-a$ était égal à b, j'aurais donc une chance égale d'avoir a ou d'avoir b. Je pose donc $2x-a=b$, d'où je tire la valeur de ma chance $x=\frac{a+b}{2}$. La preuve en est aisée. En effet, possédant $\frac{a+b}{2}$, je puis hasarder

58. Voir l'article de Norbert Meunier pour une étude plus complète. *op. cit.*

> cette somme contre un autre joueur qui mettra également $\frac{a+b}{2}$, et convenir avec lui que le gagnant donnera a à l'autre. J'aurai de force une chance égale d'avoir a si je perds, ou b si je gagne ; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $a + b$ et je lui en donne a.

Cette démonstration, d'un abord malaisé, procède par analyse et synthèse. Recherchant un jeu satisfaisant le principe, on trouve d'abord une équation, dont la solution donne le paramètre pour un bon candidat. On vérifie ensuite que ce candidat est bien un jeu satisfaisant le principe.

On peut se demander à quoi sert la partie 'analyse' de la preuve. Le candidat-jeu est plus facile à trouver par l'intuition que par le calcul rocambolesque de Huygens, et d'après le principe, son existence suffit à prouver le théorème. à mon avis, si Huygens s'est quand même lancé dans une analyse délicate, c'est parce qu'il sentait que son principe avait une faiblesse logique. Si l'on peut se contenter de l'existence d'un certain jeu auxiliaire pour trouver une valeur, qu'est-ce qui prouve alors qu'on ne trouvera pas un autre jeu auxiliaire, avec une autre valeur ? On voit bien qu'il faut ajouter quelque part une condition d'unicité, sinon du jeu auxiliaire, au moins de sa valeur. Or l'ajout d'une telle condition rend le principe soit inapplicable, si l'on impose vraiment une impossible unicité, soit difficile à formuler, si pour sauver l'unicité, on cherche à se restreindre à une certaine classe de jeux. Huygens coupe donc la poire en deux : il ne change rien à son principe, mais il résout quand même une équation pour faire quelque chose qui ressemble à une preuve d'unicité.

Nous voilà renseignés sur la manière de fonder le calcul des probabilités chez Huygens. Cette méthode présente quand même l'intérêt d'utiliser des jeux auxiliaires dans les preuves. Cette idée était déjà en germe chez Cardan [59], et pour la première fois, un jeu devient un objet mathématique au même titre qu'un nombre ou une figure, et non plus un simple objet d'étude.

Mais, au fait, comment Huygens procède-t-il pour trouver le parti entre deux joueurs à l'aide de la seule Proposition III, qui ne peut être utilisée qu'une fois les "chances" calculées ? Allez voir par vous même, et vous apprendrez qu'il utilise la méthode 'pas à pas', avec un peu moins d'élégance que Pascal !

On retiendra du mémoire de Huygens son style très actuel. Les calculs et les preuves sont présentés à quelques détails près comme dans bien des livres de mathématiques d'aujourd'hui. On voit là que même selon les critères du XVII^{e} siècle, Pascal, visiblement nostalgique de la géométrie grecque, travaillait un peu à l'ancienne.

59. Cardan calculait des partis (de faux partis évidemment) en cherchant la mise que paierait un autre joueur pour rentrer sans avantage ni dommage dans le jeu. Voir E. Coumet, *op. cit.*

C Précisions techniques sur la lettre du 29 juillet 1654

La lettre du 29 juillet 1654 présente des difficultés de lecture assez importantes, dues à l'absence totale de démonstration des résultats obtenus par la méthode des combinaisons. Voici, en langage mathématique actuel, une démonstration des résultats de Pascal, respectant l'ordre exacte dans lequel Pascal dit les avoir prouvés, et devant donc être assez proche de la démonstration originale (perdue, ou peut-être jamais mise au net).

Pour qui serait choqué par les formules et les notations modernes, que Pascal refusait comme le dit Alexandre Koyré, je précise que ces formules et ces notations peuvent tout à fait être exprimées dans le langage de Pascal. Une lecture de la lettre du 29 juillet 1654 permet de s'en convaincre. En outre, essayer d'écrire ce qui suit 'à la manière de Pascal' serait un exercice de style certes intéressant, mais aussi idiot que courir le marathon de New-York en sandales.

Remarques préliminaires

Je m'appuie sur les *Œuvres complètes* de Pascal publiées au Seuil en 1988. Je me réfère aux numéros de pages, et à une numérotation personnelle mais logique des paragraphes.

Comme nous allons le voir, une lecture précise du texte de Pascal est gênée par l'habitude actuelle de formuler tous les problèmes de théorie des jeux en termes de probabilité de gagner et d'espérance de gain.

Pour y voir plus clair, commençons par poser exactement le problème auquel s'attaque Pascal. Deux joueurs engagent au jeu une somme totale S, exprimée en pistoles. Ils jouent à pile ou face, et le premier qui remporte n parties gagne la somme. Nous dirions aujourd'hui que Pascal recherche l'espérance de gain E d'un joueur à un stade quelconque de la partie ou, ce qui revient au même, sa probabilité p de gagner. Or d'un point de vue technique, il ne calcule pas une espérance mais un nombre E' qu'il définit comme "ce qu'il en appartient sur l'argent de l'autre", c'est-à-dire comme l'espérance de gain ôtée de $S/2$ (on a donc $E' = E - S/2$). Et de même qu'à l'espérance on associe la probabilité par la formule $E = pS$, Pascal associe à son nombre E' un coefficient p' tel que $E' = p'S/2$ ($S/2$ car il ne s'intéresse qu'au parti sur l'argent de l'autre joueur et non à la somme totale). p' est donc la proportion de l'argent de l'autre qui revient au joueur ayant l'avantage. Ce n'est pas une probabilité de gagner, mais une sorte de coefficient d'avantage sur son adversaire.

On peut sans peine passer des concepts aujourd'hui usuels à ceux de Pascal. De $E' = E - S/2$, on déduit en reportant les valeurs de E et E' :

$$p'\frac{S}{2} = pS - \frac{1}{2}S$$

Ou encore :

$$p = \frac{p'}{2} + \frac{1}{2} \tag{1}$$

Il ne faut pas attacher une trop grande importance à l'usage de E' et p', puisque la notion d''avantage sur l'adversaire' n'apparaît nulle part ailleurs que dans la lettre du 29 juillet 1654. Pascal semble ne l'avoir retenue que dans la mesure où comme on l'a déjà vu, elle lui permettait d'écrire une 'belle formule', dont nous allons prouver la véracité.

Page 44, § 3

Pascal donne un résultat pour le moins obscur. Il y est question de "la valeur de la dernière partie de deux", de la "valeur de la dernière partie de trois" ...

Le sens du mot 'valeur' ne pose pas problème : à un stade quelconque du jeu, une victoire fait augmenter l'espérance de gain du joueur, et cette augmentation est la "valeur" de la partie . En revanche, l'expression "dernière partie de deux" laisse perplexe. Voici mon interprétation de ce qu'a voulu dire Pascal.

Au moment où un joueur gagne le jeu, le score est nécessairement de la forme $(n,\, n-k+1)$, avec $k \geq 2$. Pascal dit simplement que la valeur de la dernière partie jouée est alors de $S/2^{k-1}$, ce qui se vérifie par une récurrence sur k. à mon avis, quand Pascal dit à Fermat "dernière partie de 2", il dit en fait que k vaut 2 ; quand il parle de la "dernière partie de 3", il considère que $k = 3$ etc. Voyons ce qui me permet d'affirmer cela :

Admettons que Pascal considère des parties 'canoniques' dans lesquelles, pour arriver au score final de $(n,\, n-k+1)$, les joueurs commencent par faire une quasi-égalité à $(n-k,\, n-k+1)$, et où par la suite le joueur ayant $(n-k)$ remonte son handicap jusqu'à la victoire finale. On voit alors que c'est bien à une suite de k victoires consécutives que le vainqueur doit de gagner. Voilà en quoi l'expression "dernière partie de 2" peut correspondre à $k = 2$, "dernière partie de 3" à $k = 3$ et ainsi de suite.

Page 44, § 4 à Page 44, § 8

Pascal donne la valeur de la première partie gagnée dans le cas d'une partie à n joueurs. Ici le recours à une formulation moderne permet de gagner en concision : Pascal veut calculer "La proportion des premières parties". En langage moderne, nous dirions qu'il cherche l'espérance de gain d'un joueur sachant qu'il a déjà une victoire à zéro à son actif.

Pascal dit que (Page 44, § 8) :

$$p' = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(2i-1)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(2i)} \tag{2}$$

Page 44, § 9 à Page 45, § 4

Pascal 'démontre' la propriété ci-dessus. En fait, Pascal ne s'attarde que sur les parties triviales de la démonstration, laissant dans l'ombre ce qui est à mon sens le plus important. Au § 9, Pascal annonce que ses méthodes de probabilités conditionnelles ne lui ont pas permis de trouver quelque chose d'intéressant dans le cas général de n joueurs. Les paragraphes 10 à 12 (ce dernier étant la traduction du latin en français du § 11) sont entièrement consacrés à l'énoncé de la formule suivante :

$$\binom{n-1}{2(n-1)}+\binom{n}{2(n-1)}+\binom{n+1}{2(n-1)}+\cdots+\binom{2(n-1)}{2(n-1)} = 2^{2n-3}+\frac{1}{2}\binom{n-1}{2(n-1)} \tag{3}$$

Pascal ne donne pas la moindre indication sur la manière de prouver cette formule, qui résulte des Conséquences septième et neuvième du *Traité du triangle arithmétique*, et il n'en fait aucun usage explicite par la suite.

à la Page 45, § 2, Pascal remarque qu'après une victoire le jeu se résout obligatoirement en $2(n-1)$ coups au plus.

Au § 3, Pascal énonce au moyen du nombre générique le résultat suivant :

$$p' = \frac{1}{2^{2n-2}}\binom{n-1}{2n-2} \tag{4}$$

Ce résultat n'est pas immédiat, et Pascal n'en donne pas la preuve. J'en propose une qui est probablement proche de la démonstration originelle puisqu'elle utilise (3) :

Je mène par (1, 0). Le jeu se décidera donc en au plus $2(n-1)$ coups. Supposons que ces $2(n-1)$ coups soient effectivement joués [60]. Ma probabilité de gagner est égale au nombre N_f de cas favorables sur le nombre total $2^{2(n-1)}$ de cas. Pour gagner, il suffit que sur les $2^{2(n-1)}$ coups j'en gagne au moins $n-1$. Donc on peut écrire :

$$N_f = \binom{n-1}{2(n-1)} + \binom{n}{2(n-1)} + \binom{n+1}{2(n-1)} + \cdots + \binom{2(n-1)}{2(n-1)}$$

En utilisant (3), on voit donc que :

$$N_f = \frac{1}{2}\binom{n-1}{2(n-1)} + 2^{2n-3}$$

Ainsi :

$$p = \frac{\frac{1}{2}\binom{n-1}{2(n-1)} + 2^{2n-3}}{2^{2(n-1)}}$$

Ou encore :

60. Cet artifice de calcul, la condition feinte, fait l'objet d'une controverse analysée dans la première partie de ce mémoire.

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\binom{n-1}{2(n-1)}}{2^{2(n-1)}}$$

En utilisant (1) on trouve bien :

$$p' = \frac{1}{2^{2n-2}}\binom{n-1}{2n-2}$$

Il se peut que Pascal ait calculé directement p' sans passer par le calcul de p. Je ne suis pas parvenu à imaginer un tel raisonnement. Mais dans cette hypothèse, on pourrait supposer que Pascal a développé au moins provisoirement un calcul des 'coefficients d'avantage sur son adversaire', très commode pour le calcul pas à pas des espérances de gains (voir la méthode 'pas à pas') mais dont les principes me restent mystérieux s'il fallait l'appliquer directement à la méthode par les combinaisons. Cela me paraît toutefois invraisemblable puisque dans tous ses autres travaux, Pascal n'a plus jamais recours à de telles notions.

Enfin, au § 4, Pascal rappelle son résultat (2), sans donner plus d'information sur sa preuve. Là encore, j'ai quelque idée sur la façon dont Pascal a pu procéder pour montrer (2) à partir de (4) :

D'après une expression classique de C_n^p, qui apparaît tout à la fin du *Traité du triangle arithmétique*, on a :

$$\frac{\binom{n-1}{2n-2}}{2^{2n-2}} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-2)}{1(2)(3)\cdots(n-1)}\frac{1}{2^{2n-2}}$$

Ce dont on déduit :

$$p' = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-2)}{2(4)(6)\cdots 2(n-1)}\frac{1}{2^{n-1}}$$

Donc prouver (2) revient à monter que :

$$2^{n-1}(1(3)(5)\cdots(2n-3)) = n(n+1)(n+2)\cdots(2n-2)$$

Cette égalité se montre par récurrence[61] On la vérifie sans peine pour des petites valeurs de n. Suposons qu'elle soit vraie pour n fixé et explicitons alors le membre gauche dans le cas $n+1$:

$$2^n(1(3)(5)\cdots(2n-1)) = 2(2n-1)(n(n+1)(n+2)\cdots(2n-2))$$

On obtient alors ce qu'on voulait montrer :

$$2^n(1(3)(5)\cdots(2n-1)) = (n+1)(n+2)\cdots(2n-2)(2n-1)(2n).$$

61. à mon avis Pascal n'a pas démontré cette relation par récurrence. Mais ce point est secondaire étant donné le caractère élémentaire de la propriété.

D Bibliographie

Voici les recueils des textes de Pascal, Fermat et Huygens utilisés pour la préparation de ce mémoire.

- *Œuvres complètes* de Fermat.
  On y trouvera une correspondance exhaustive avec des indications précises sur la datation des lettres.
- *Précis des œuvres mathématiques de Fermat*, chez Jacques Gabay, 1989.
  Curieuse compilation (sans table des matières). Sûrement plus facile à se procurer que les *Œuvres complètes*. En regardant successivement toutes les pages, on trouvera après un nombre fini d'itérations quelques lettres de Fermat.
- *Œuvres complètes* de Pascal, au Seuil, 1988.
  Comportent tous les traités. On ne trouvera que les lettres de Pascal lui-même, ce qui n'est pas très pratique. Mais les passages en latin sont traduits.
- *Pensées* de Pascal
  L'édition du Livre de poche a un index plus copieux que celui des *Œuvres complètes*. Permettez-moi d'illustrer ce point par une anecdote personnelle : un soir, j'entrepris de lire quelques pensées, Je tombai sur un passage plus abscons encore que les autres, plus profond peut-être. Au moment de m'endormir, je réalisai qu'en fait je lisais l'index.

E Actualité de la géométrie du hasard